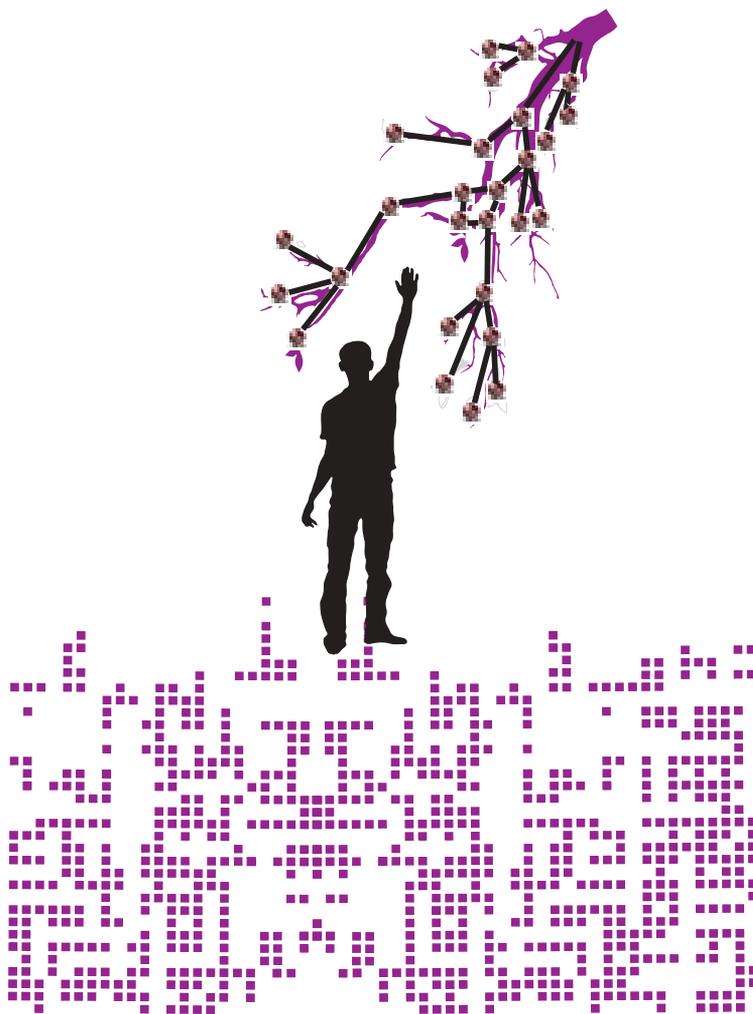


Héctor Tarifa - Gonzalo Bono

Apuntes de Álgebra II



APUNTES DE ÁLGEBRA II

APUNTES DE ÁLGEBRA II

HÉCTOR TARIFA

GONZALO BONO

Universidad Nacional de Jujuy

2020

Prohibida la reproducción total o parcial del material contenido en esta publicación por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, sin permiso expreso del Editor.

Tarifa, Héctor R. Apuntes de Álgebra II / Héctor R. Tarifa ; Gonzalo Bono. - 1a ed. - San Salvador de Jujuy : Editorial de la Universidad Nacional de Jujuy - EDIUNJU, 2020.

Libro digital, PDF Archivo Digital:
descarga y online

ISBN 978-950-721-560-5 1.

Álgebra. I. Bono, Gonzalo. II. Título.

CDD 512



Diseño de tapa e interior: Edgardo Gutiérrez
Corrección y cuidado de edición: Silvina Campo

© 2020 Héctor Tarifa – Gonzalo Bono

© 2020 Editorial de la Universidad Nacional de Jujuy

Avda. Bolivia 1685 - CP 4600

San Salvador de Jujuy - Pcia. de Jujuy - Argentina

Tel. (0388) 4221511- e-mail: ediunju@gmail.com

2020 1ra Edición

Queda hecho el depósito que previene la Ley 11.723

Impreso en Argentina - Printed in Argentina

ÍNDICE	PÁG.
INTRODUCCIÓN	13
• Relaciones	15
Objetivos	
1.- Introducción	19
2.- Relaciones binarias	19
2.1.- Relaciones en un conjunto	
3.- Propiedades de las relaciones	22
3.1.- Operaciones con relaciones	
3.2.- Relación complementaria	
3.3.- Relación inversa	
3.4.- Composición de relaciones	
4.- Representación de relaciones	34
4.1.- Representación mediante matrices booleanas	
4.2.- Representación mediante dígrafos	
5.- Relaciones de equivalencia	44
5.1.- Clases de equivalencia	
5.2.- Clases de equivalencias y particiones	
6.- Aplicaciones de las relaciones	51
6.1.- Base de datos relacionales	
6.2.- Una lista enlazada es una relación	
Trabajo Práctico: Relaciones	61
Autoevaluación: Relaciones	
Ejercicios de programación: Relaciones	
Bibliografía	
• Grafos	71
Objetivos	

1.- Introducción	75
2.- Tipos de grafos	75
3.- Terminología en teoría de grafos	80
3.1.- Terminología básica	
3.2.- Clases especiales de grafos simples	
3.3.- Grafos Bipartitos	
3.4.- Subgrafos	
4.- Representación de grafos	93
4.1.- Matrices de Adyacencia	
4.2.- Matrices de Incidencia	
4.3.- Isomorfismo de grafos	
5.- Conexión de grafos	107
5.1.- Grafos conexos	
5.2.- Componentes conexas de un grafo	
5.3.- Conexión en grafos dirigidos	
5.4.- Caminos e isomorfismo de grafos	
5.5.- El número de caminos entre dos vértices	
6.- Caminos eulerianos y hamiltonianos	119
6.1.- Caminos y circuitos eulerianos	
6.2.- Caminos y circuitos hamiltonianos	
7.- Aplicaciones de Grafos	131
7.1.- Grafos como modelos	
7.2.- Grafos como pasatiempos	
Trabajo Práctico: Grafos I	
Trabajo Práctico: Grafos II	
Autoevaluación: Grafos I	
Autoevaluación: Grafos II	
Ejercicios de programación: Grafos	

Bibliografía	
• Árboles	147
Objetivos	
1.- Introducción	151
2.- Árboles	152
2.1.- Terminología y caracterización de los árboles	
2.2.- Propiedades de los árboles	160
3.- Recorridos en árboles	
3.1.- Algoritmos de recorridos	
3.2.- Recorrido en árboles etiquetados	
4.- Árboles generadores	169
4.1.- Procedimiento de búsqueda en profundidad	
4.2.- Procedimiento de búsqueda en anchura	
5.- Árbol generador mínimo	177
6.- Aplicaciones de los árboles	183
6.1.- Códigos instantáneos	
6.2.- Árboles de juego	
6.3.- Árboles como modelos	
Trabajo Práctico: Árboles	
Autoevaluación: Árboles	
Ejercicios de programación: Árboles	
Bibliografía	
• Álgebra de Boole	201
Objetivos	
1.- Introducción	205
2.- Álgebras booleanas	206
2.1.- Propiedades de las álgebras booleanas	
3.- Álgebras booleanas para circuitos combinatoriales	212

3.1.- Funciones y expresiones booleanas	
3.2.- Representación de funciones booleanas	
3.3.- Simplificación de funciones booleanas	
4.-Aplicaciones del álgebra booleana	230
4.1.- Compuertas lógicas	
4.2.- Electrónica digital	
Trabajo Práctico: Álgebra booleana	
Autoevaluación: Álgebra booleana	
Ejercicios de programación: Álgebra booleana	
Bibliografía	
• Probabilidades	241
Objetivos	
1.- Introducción	245
2.- Sucesos aleatorios	246
3.- Definición y propiedades de la probabilidad	251
3.1.- Concepto clásico de probabilidad	
3.2.- Definición axiomática de probabilidad	
3.3.- Propiedades de la probabilidad	
4.- Probabilidad condicionada	263
4.1.- Sucesos dependientes e independientes	
4.2.- Teorema de la probabilidad total	
Trabajo Práctico: Probabilidades	
Autoevaluación: Probabilidades	
Ejercicios de programación: Probabilidades	
Bibliografía	
• Estadística descriptiva	283
Objetivos	
1.- Introducción	287

2.- Conceptos básicos	288
2.1.- Población y muestra	
2.2.- Característica de los conjuntos de datos	
2.3.- Tipo de datos	
3.- Distribuciones de frecuencias	293
3.1.- Tabla de frecuencia de una variable discreta	
3.2.- Agrupamiento en intervalos de clases	
3.3.- Representaciones gráficas	
4.- Medidas características de una distribución	308
4.1.- Medidas de centralización	
4.2.- Medidas de dispersión	
4.3.- Asimetría y curtosis	
Trabajo Práctico: Estadística	
Autoevaluación: Estadística	
Ejercicios de programación: Estadística	
Bibliografía	
Los Autores	351

INTRODUCCIÓN

Apuntes de Álgebra II fue elaborado a partir de las notas del curso de Matemática Discreta que dictan los autores para los alumnos del segundo año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy. El contenido cubre todos los temas del programa de la asignatura Álgebra II de la carrera Analista Programador Universitario que se dicta en la facultad.

La concepción de la obra está orientada por su intención de servir principalmente como ayuda, como un complemento para la enseñanza de la matemática; esto ha determinado la selección de material y la forma de exposición. Se procuró un estilo claro, detallado y didáctico, incluyendo ejemplos luego de las definiciones, las demostraciones necesarias y ejercicios para cada uno de los temas desarrollados. Si bien se han omitido las referencias bibliográficas en el desarrollo de la exposición, se han incluido al final de cada capítulo las bibliografías básicas que pueden servir de guía para consultas y posteriores lecturas.

Cada capítulo de los *Apuntes* corresponde a un contenido en particular y, para cada uno de ellos, se propuso la siguiente estructura.

En primer lugar, se enuncian los objetivos que se persiguen al desarrollar cada tema y una breve introducción destacando cuál es el sentido que tiene estudiar dicho tema en una carrera informática. Acto seguido se desarrollan las particularidades de cada contenido teniendo presente que los conceptos teóricos tienen que ir acompañados siempre de ejemplos prácticos.

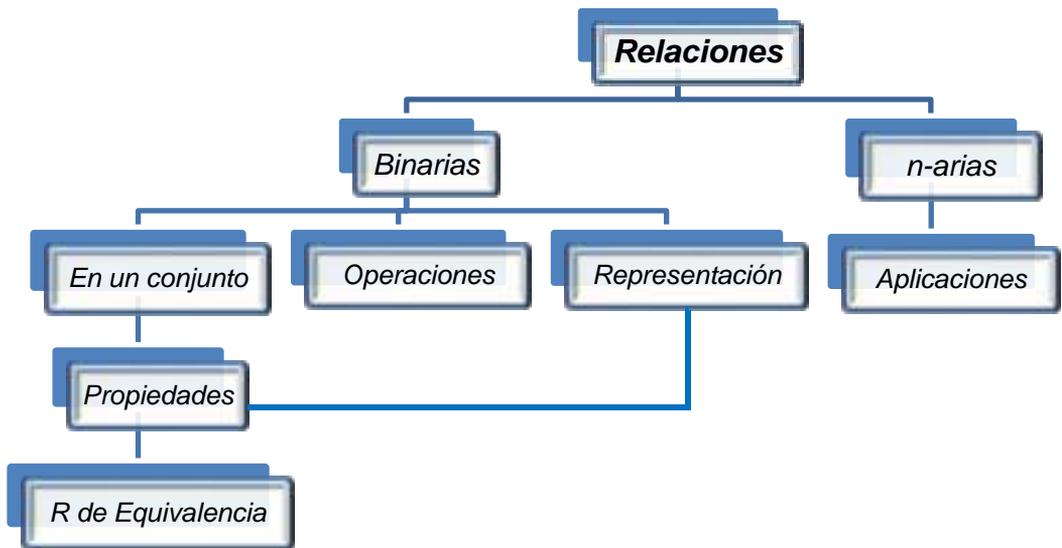
Cada apartado finaliza con algunas aplicaciones que tienen las nociones desarrolladas en las ciencias de la computación. Además, para afianzar y aplicar los conocimientos, se propone una guía de trabajo práctico, una autoevaluación y una serie de ejercicios de programación.

Se debe tener presente, para el mejor uso de estos apuntes, lo que realmente son, considerando que no se trata de un texto propiamente dicho y que, en consecuencia, no debe emplearse como medio para evitar la consulta de fuentes bibliográficas.

Para que la utilización de este material sea verdaderamente eficaz, es necesario que el estudiante no solo lea detenidamente las definiciones, propiedades, teoremas o ejemplos aquí propuestos, sino que también analice, cuestione, aplique y haga las demostraciones por sí mismo; fijándose bien en el porqué de cada uno de los pasos propuestos y en la forma en que estos se expresan.

De esta manera, el alumno no solo logrará desarrollar y potenciar su habilidad para entender y crear argumentos matemáticos, sino que podrá darse cuenta de que el estudio de la parte discreta de las Matemáticas le proporcionará la base necesaria para entender y comprender muchos otros temas relacionados con ciencias de la computación: estructura de datos, algoritmos, teoría de base de datos, entre otros.

RELACIONES



OBJETIVOS

- ✓ Adquirir el concepto de relación.
- ✓ Reconocer las distintas propiedades que cumple una relación.
- ✓ Representar relaciones mediante matriz y dígrafo.
- ✓ Reconocer las propiedades de las relaciones analizando la matriz y/o dígrafo correspondiente.
- ✓ Operar con relaciones.
- ✓ Distinguir las características de las relaciones de equivalencia.
- ✓ Aplicar los conceptos de relación en un lenguaje de programación.

RELACIONES

1. INTRODUCCIÓN

Las relaciones entre los elementos de conjuntos se dan en distintos contextos. Seres humanos, edificios, profesiones, códigos postales, medios de transporte, entre otros muchos, son algunos de los conjuntos más comunes de interés para las personas, y a diario se establecen relaciones entre ellos para organizar distintas actividades. Por ejemplo, la relación que hay entre una persona y su número de teléfono, entre profesiones y salarios, etc.

En matemática, en general, se suele establecer la relación que pudiere existir entre dos números reales (mayor, menor o igual), entre dos ángulos (adyacentes, complementarios, suplementarios, opuestos, etc.). Particularmente en informática se utilizan relaciones como la que hay entre un programa informático y una de las variables que emplea, o bien entre un lenguaje de programación y una sentencia válida en dicho lenguaje.

2. RELACIONES BINARIAS

La noción de relación entre dos conjuntos de objetos es bastante común e intuitivamente clara; la forma más directa de expresar este tipo de relaciones es usar pares ordenados de elementos relacionados entre sí. Por eso se llaman relaciones binarias a los conjuntos de pares ordenados.

Definición:

Sean A y B dos conjuntos, una relación R binaria, de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Sean A y B conjuntos $\Rightarrow R \subseteq A \times B$ o sea $R = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$

Es decir que una relación binaria entre conjuntos es otro conjunto R , de pares ordenados, en los que el primer elemento de cada par es un elemento de A y el

segundo es un elemento de B. Si el par (x, y) pertenece a la relación se escribe $x R y$, y se dice que el elemento x está relacionado con y ; caso contrario $x \not R y$ o sea que $(x, y) \notin R$.

Recuérdese que una función f definida de un conjunto A en un conjunto B, asigna a cada elemento de A uno y solo un elemento de B, es decir que en una función se establece una relación biunívoca¹ entre los elementos de los conjuntos A y B.

Una relación R se puede utilizar para expresar una relación multívoca entre los elementos de los conjuntos A y B, de modo que un elemento de A puede estar relacionado con más de un elemento de B.

Se puede considerar que las relaciones son una generalización de las funciones y suelen emplearse para expresar una clase mucho más amplia de relaciones entre conjuntos.

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ si se define la relación R de la siguiente manera: $R = \{(x, y) / x \text{ divide a } y\}$, se obtiene:

$$R = \{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}$$

Las relaciones se pueden representar gráficamente de muchas maneras, por ahora, se verán dos de ellas: por diagrama de flechas y por tabla de doble entrada. Continuando con el ejemplo anterior, la representación gráfica de la relación por estos métodos sería la siguiente:

¹ De bi y unívoca, es la correspondencia entre dos conjuntos en la que a cada elemento del primer conjunto corresponde, a lo sumo, uno del segundo y a cada elemento del segundo conjunto corresponde, a lo sumo, uno del primero.

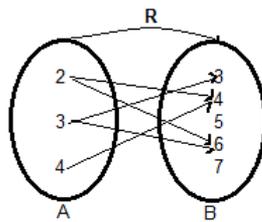


Diagrama de flechas

R	3	4	5	6	7
2		X		X	
3	X			X	
4		X			

Tabla de doble entrada

2.1. RELACIONES EN UN CONJUNTO

En la definición de relación binaria no se establece condición alguna para los conjuntos A y B, por lo tanto, estos pueden, por ejemplo, ser iguales. Esta situación provoca que solo se trabaje con un conjunto. Las relaciones de un conjunto A en sí mismo son de un interés particular.

Definición:

Una relación R binaria, en un conjunto A es una relación de A en A.

En otras palabras, una relación en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano: $A \times A$.

Ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, una relación definida en este conjunto puede ser $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$

Con este segundo ejemplo se muestra que es posible establecer una relación con solo especificar qué pares ordenados pertenecen a ella, mientras que, en el ejemplo anterior, se estableció la regla de pertenencia a la relación.

¿Cuántas relaciones se pueden establecer en un conjunto de n elementos?

Si A tiene n elementos, o sea $\# A = n$, el producto cartesiano $A \times A$ tendrá n^2 elementos. Los subconjuntos que se pueden formar con los m elementos de un conjunto B es 2^m . Como una relación en un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$, entonces hay 2^{n^2} relaciones en un conjunto de n elementos.

Ejemplo:

Si $A = \{a, b\}$ habrá $2^{2^2} = 2^4 = 16$ relaciones. ¿Cuáles son esas 16 relaciones?

Primeramente $A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)\}$ Por lo tanto, las relaciones son

$A \times A$	\emptyset	$\{(a, a)\}$	$\{(a, b)\}$	$\{(b, b)\}$	$\{(b, a)\}$
$\{(a, a), (a, b)\}$		$\{(a, a), (a, b), (b, b)\}$			
$\{(a, a), (b, b)\}$		$\{(a, a), (a, b), (b, a)\}$			
$\{(a, a), (b, a)\}$		$\{(a, a), (b, b), (b, a)\}$			
$\{(a, b), (b, b)\}$		$\{(a, b), (b, b), (b, a)\}$			
$\{(a, b), (b, a)\}$					
$\{(b, b), (b, a)\}$					

Si $A = \{a, b, c\}$ habrá $2^{3^2} = 2^9 = 512$ relaciones que se pueden establecer en el conjunto A.

Si $A = \{a, b, c, d\}$ habrá $2^{4^2} = 2^{16} = 65.536$ relaciones que se pueden establecer en el conjunto A.

3. PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Las relaciones en un conjunto pueden ser clasificadas según las propiedades que cumplan sus elementos. A continuación, se definirán estas propiedades.

Reflexividad

Se dice que una relación R en un conjunto A es reflexiva si $(x, x) \in R$ para cada elemento $x \in A$.

Si $\forall x \in A: (x, x) \in R \Rightarrow R$ es reflexiva.

Una relación definida en un conjunto A es reflexiva si cada elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.

Sea el conjunto A y $R_I = \{(x, x) / x \in A\}$ esto quiere decir que R_I es la relación de igualdad en A. Entonces R_I es reflexiva, ya que $(x, x) \in R_I$ para todo $x \in A$.

R_I se puede usar para identificar si una relación R es reflexiva, ya que R es reflexiva si y solo si $R_I \subseteq R$.

Irreflexividad

Se dice que una relación R en un conjunto A es irreflexiva si $(x, x) \notin R$ para cada elemento $x \in A$.

Si $\forall x \in A: (x, x) \notin R \implies R$ es irreflexiva.

Una relación definida en un conjunto A es irreflexiva si cada elemento del conjunto no está relacionado consigo mismo.

Para identificar si una relación es irreflexiva, también es útil la R_I ya que R es irreflexiva si y solo si $R_I \cap R = \emptyset$.

Simetría

Se dice que una relación R en un conjunto A es simétrica si para todo par de elementos x, y de A ; $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$.

Si $\forall x, y \in A: ((x, y) \in R \implies (y, x) \in R) \implies R$ es simétrica.

Esto quiere decir que una relación es simétrica si y solo si, el hecho de que un elemento cualquiera x esté relacionado con otro y , implica que y también está relacionado con x .

Asimetría

Se dice que una relación R en un conjunto A es asimétrica si para todo par de elementos x, y de A , $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \notin R$.

Si $\forall x, y \in A: ((x, y) \in R \implies (y, x) \notin R) \implies R$ es asimétrica.

Si un elemento está relacionado con otro y este último no lo está con el primero, la relación se dice asimétrica.

Antisimetría

Se dice que una relación R en un conjunto A es antisimétrica si para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ solo si $x = y$

Si $\forall x, y \in A: ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$, R es antisimétrica

Una segunda manera de expresar la antisimetría es:

Se dice que una relación R en un conjunto A es antisimétrica si para todo $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ con $x \neq y$ entonces $(y, x) \notin R$

Si $\forall x, y \in A: ((x, y) \in R \wedge x \neq y) \Rightarrow (y, x) \notin R$, R es antisimétrica.

Recordando que la contrarrecíproca de una proposición tiene el mismo valor de verdad que esta, también puede ayudar a entender el concepto de antisimetría, la contrarrecíproca de la primera definición. Es decir que una relación R es antisimétrica si:

$\forall x, y \in A: x \neq y \Rightarrow ((x, y) \notin R \vee (y, x) \notin R)$, R es antisimétrica

Es decir que una relación es antisimétrica si no hay pares de elementos distintos x e y tales que x está relacionado con y , también y está relacionado con x .

Los términos simétrico y antisimétrico no son opuestos, ya que una relación puede tener ambas propiedades o carecer de ellas. Una relación no puede ser a la vez simétrica y antisimétrica si contiene algún par de la forma (x, y) con $x \neq y$

Transitividad

Se dice que una relación R en un conjunto A es transitiva si para cualesquiera $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ se tiene que $(x, z) \in R$.

Si $\forall x, y, z \in A ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$, entonces R es transitiva.

Ejemplos:

a) Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considérese las siguientes relaciones:

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\},$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\},$$

$$R_3 = \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

R_1 es reflexiva ya que $\forall x \in A: (x, x)$ está en la relación, mientras que R_2 no es reflexiva porque $(3, 3) \notin R_2$, R_3 tampoco es reflexiva.

R_3 es irreflexiva, obsérvese que $\forall x \in A: (x, x)$ no está en la relación. R_2 no es irreflexiva pues por ejemplo $(1, 1)$ pertenece a la relación. R_1 no es irreflexiva.

R_3 es simétrica, mientras que R_1 no lo es, porque $(1, 2) \in R_1$ pero $(2, 1) \notin R_1$. R_2 no es simétrica pues $(3, 4) \in R_2$ pero $(4, 3) \notin R_2$.

Ninguna de las tres relaciones es asimétrica. En R_1 está, por ejemplo, el par $(1, 1)$ y su simétrico que es el mismo par $(1, 1)$. Para las relaciones R_2 y R_3 se cumple que figura el par $(1, 2)$ y su simétrico $(2, 1)$. Si en la relación R_1 se eliminasen los pares $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ y $(4, 4)$, la misma se convertiría en una relación asimétrica.

La relación R_1 es antisimétrica, mientras que la R_2 no lo es, pues $1 \neq 2$, $(1, 2) \in R_2$ y $(2, 1) \in R_2$. La relación R_3 tampoco es antisimétrica por razones similares a R_2 .

Respecto de la transitividad se puede afirmar que R_1 es transitiva y R_2 no; porque $(3, 4)$ y $(4, 1) \in R_2$ pero $(3, 1) \notin R_2$. La relación R_3 tampoco es transitiva.

b) Sea el conjunto de los números enteros, considérese las siguientes relaciones:

$$R_4 = \{(x, y) / x = y\}$$

$$R_5 = \{(x, y) / x = y + 1\}$$

$$R_6 = \{(x, y) / x + y \leq 3\}$$

La reflexividad la cumple R_4 (todo número entero es igual a sí mismo), mientras que R_5 no es reflexiva porque no puede ocurrir que $x = x + 1$ para algún número entero. R_6 no es reflexiva.

R_5 es irreflexiva, puesto que no existe un número entero x tal que se cumpla $x = x + 1$, y R_6 no es irreflexiva ya que existe, por ejemplo, el entero 1 tal que $1 + 1 \leq 3$.

La relación R_4 es simétrica porque si un número entero es igual a otro, este es igual al primero. R_5 no es simétrica ya que, para cualquier par de números enteros, si $x = y + 1$ no puede ocurrir que $y = x + 1$, sino que es $y = x - 1$. Por esta misma razón, R_5 es asimétrica. R_6 es simétrica.

La relación R_6 no es asimétrica porque, por ejemplo, el par de números enteros $(1, 2)$ y $(2, 1)$ pertenece a la relación.

R_4 es antisimétrica ya que dos elementos están relacionados por medio de esta relación si y solo si son iguales. R_6 no es antisimétrica puesto que si un par de números enteros x, y cumplen que $x + y \leq 3$ siempre se cumplirá que $y + x \leq 3$. R_5 es antisimétrica.

En cuanto a la transitividad se puede observar que R_4 es transitiva (por el carácter transitivo de las igualdades), mientras que R_5 no es transitiva, pues $(2, 1)$ y $(1, 0)$ pertenecen a la relación, pero $(2, 0)$ no. R_6 tampoco es transitiva ya que $(1, 0)$ y $(0, 3)$ pertenecen a R_6 , pero $(1, 3)$ no pertenece a R_6 .

3.1. OPERACIONES CON RELACIONES

Debido a que las relaciones de un conjunto A en un conjunto B son subconjuntos de $A \times B$, dos relaciones de A en B se pueden combinar de las distintas maneras en que se pueden combinar dos conjuntos. Mediante los

siguientes ejemplos se evidenciarán tres de las operaciones con relaciones: unión, intersección y diferencia.

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y las siguientes relaciones que fueron definidas de A en B :

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \text{ y } R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales y las relaciones $R_1 = \{(x, y) / x < y\}$, $R_2 = \{(x, y) / x > y\}$. Obtener $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ y $R_2 - R_1$.

Un par ordenado (x, y) pertenece a $R_1 \cup R_2$ si y solo si pertenece a R_1 o a R_2 , se sigue que debe cumplirse que $x < y$ o bien $x > y$, esta condición significa que $x \neq y$. Por lo tanto, la relación unión será: $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) / x \neq y\}$.

Razonando en forma análoga se puede establecer que la intersección de estas dos relaciones no puede tener elemento alguno ya que no puede cumplirse simultáneamente que para dos números reales x e y sea $x < y$ y también $x > y$. Luego se sigue que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Como R_1 y R_2 son disjuntos², se puede establecer que $R_1 - R_2 = R_1$ y $R_2 - R_1 = R_2$.

² Dos conjuntos son disjuntos cuando su intersección es el conjunto vacío, no tienen elementos en común.

3.2. RELACIÓN COMPLEMENTARIA

También es posible usar otras operaciones de conjuntos con relaciones, por ejemplo, el complemento de una relación R es conocido como relación complementaria.

Definición:

Sea R la relación de un conjunto A en un conjunto B , la relación complementaria, que se denota por \bar{R} , es la relación definida por $\bar{R} = \{(x, y) / (x, y) \notin R\}$.

Forman parte de la relación complementaria todos aquellos pares ordenados que pertenecen al producto cartesiano de los conjuntos A y B pero que no pertenecen a la relación R .

3.3. RELACIÓN INVERSA

Un tipo diferente de operación en una relación R , es la formación de la relación inversa, esta relación es una relación de B en A (orden invertido de R).

Definición:

Sea R la relación de un conjunto A en un conjunto B , la relación inversa denotada por R^{-1} es la relación definida por $R^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in R\}$

Forman parte de la relación inversa todos aquellos pares ordenados que se obtienen al intercambiar las posiciones de sus componentes, es decir que si el par (x, y) pertenece a R , entonces el par (y, x) pertenecerá a R^{-1} .

Un caso particular es $R_I = \{(x, x) / x \in A\}$ al intercambiar las posiciones de las componentes de los pares ordenados, se obtiene el mismo par ordenado, esto quiere decir que $R_I = R_I^{-1}$.

Ejemplos:

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$, se establece entre estos dos conjuntos la siguiente relación $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (2, c), (3, a)\}$

Por lo tanto:

$\bar{R} = \{(1, b), (2, a), (3, b), (3, c)\}$ es la relación complementaria, mientras que la relación inversa es: $R^{-1} = \{(a, 1), (c, 1), (b, 2), (c, 2), (a, 3)\}$

Sea \mathbb{Z} el conjunto de números enteros y la relación $R = \{(x, y) / x \text{ divide a } y\}$. Por lo tanto:

$\bar{R} = \{(x, y) / x \text{ no divide a } y\}$ y $R^{-1} = \{(x, y) / y \text{ divide a } x\}$

3.4. COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Hay otra manera de combinar relaciones que es análoga a la composición de funciones. Supóngase que A, B y C son conjuntos y R es una relación de A en B y S otra relación de B en C . Entonces se puede definir una nueva relación, llamada composición de R y S , aplicando primero la relación R y después la relación S . La composición de las relaciones generaliza la composición de funciones.

Definición:

Sean R una relación de un conjunto A en un conjunto B y S una relación de B en un conjunto C . La composición de R y S , denotada por $S \circ R$, es la relación constituida por los pares (x, z) con $x \in A$ y $z \in C$ para los cuales existe un elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in S$.

$$S \circ R = \{(x, z) / \exists y \in B \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

Determinar los pares ordenados de la composición de dos relaciones significa hallar elementos que sean la segunda componente de algún par ordenado de la primera relación y a su vez la primera componente de algún par ordenado de la segunda relación.

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ la relación de A en B, $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ y los conjuntos $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, la relación $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Por lo tanto: $S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$

Nótese que, por ejemplo, el par $(2, 3)$ de R y el par $(3, 1)$ de S, producen el par $(2, 1)$ de $S \circ R$.

Por otra parte: $R \circ S = \{(3, 1), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

Nótese que, por ejemplo, el par $(4, 1)$ de S y el par $(1, 4)$ de R, producen el par $(4, 4)$ de $R \circ S$.

Observando los resultados obtenidos de $S \circ R$ y $R \circ S$ se puede afirmar que en general $S \circ R \neq R \circ S$.

Sea \mathbb{R} el conjunto de n^{os} reales y las relaciones $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ y $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$. Por lo tanto: $S \circ R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\} = S$.

Esto significa que al realizar la composición de la relación que tiene como elementos pares de números reales e iguales con la que tiene pares de números reales, tal que el primero es menor que el segundo, se obtiene como resultado los pares ordenados de esta última relación.

Se demostrarán, a continuación, algunas propiedades útiles acerca de las combinaciones de relaciones. Como las relaciones son conjuntos, para las demostraciones se utilizan las técnicas proporcionadas por la teoría conjuntista.

Teorema 1:

Sean A y B dos conjuntos, R y S dos relaciones definidas de A en B.

a) Si $R \subseteq S$, entonces $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

b) Si $R \subseteq S$, entonces $\overline{S} \subseteq \overline{R}$.

$$c) (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \quad y \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}.$$

$$d) \overline{(R \cup S)} = \bar{R} \cap \bar{S} \quad y \quad \overline{(R \cap S)} = \bar{R} \cup \bar{S}.$$

Demostración

a) Sea $(a, b) \in R^{-1}$ entonces por definición de relación inversa, $(b, a) \in R$, de manera que $(b, a) \in S$, pues por hipótesis $R \subseteq S$. Esto último a su vez implica que $(a, b) \in S^{-1}$ por definición de relación inversa. Puesto que cada elemento de R^{-1} está en S^{-1} queda demostrado que $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

b) Si $(a, b) \in R$ entonces $(a, b) \in S$ por definición de inclusión. La contrarrecíproca de esta proposición es: Si $(a, b) \notin S$ entonces $(a, b) \notin R$. Por lo tanto $(a, b) \in \bar{S}$ implica que $(a, b) \in \bar{R}$. Resto último significa que $\bar{S} \subseteq \bar{R}$.

c) Si $(a, b) \in (R \cap S)^{-1}$ entonces $(b, a) \in R \cap S$ de tal manera que por definición de intersección $(b, a) \in R$ y $(b, a) \in S$, esto significa que $(a, b) \in R^{-1}$ y $(a, b) \in S^{-1}$ por la definición de relación inversa, de modo que $(a, b) \in R^{-1} \cap S^{-1}$, lo que implica que $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$. Para la contención inversa, si $(a, b) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ por la definición de intersección esto significa que $(a, b) \in R^{-1}$ y $(a, b) \in S^{-1}$ que por la definición de relación inversa $(b, a) \in R$ y $(b, a) \in S$. Se sigue que $(b, a) \in R \cap S$, por lo tanto se puede afirmar que $(a, b) \in (R \cap S)^{-1}$ lo que implica que $R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$. Como se cumple que $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$ y también $R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$ se concluye que $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$. De manera similar se puede demostrar la segunda parte de este inciso.

d) Sea $x \in \overline{(R \cup S)}$ entonces se sabe que $x \notin (R \cup S)$ de manera tal que $x \notin R \wedge x \notin S$ por la definición de intersección, por lo tanto $x \in \bar{R} \wedge x \in \bar{S}$ se sigue que $x \in \bar{R} \cap \bar{S}$ y, por lo tanto, queda demostrado que $\overline{(R \cup S)} \subseteq \bar{R} \cap \bar{S}$. Recíprocamente, si $x \in \bar{R} \cap \bar{S}$ implica que $x \notin R$ y $x \notin S$, lo que significa que

$x \notin R \cup S$, por lo tanto $x \in \overline{R \cup S}$. Todo esto implica que $\overline{R} \cap \overline{S} \subseteq \overline{(R \cup S)}$. Como $\overline{(R \cup S)} \subseteq \overline{R} \cap \overline{S}$ y también $\overline{R} \cap \overline{S} \subseteq \overline{(R \cup S)}$ se concluye que $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$. De manera similar se puede demostrar la segunda parte de este inciso.

Teorema 2:

Sean R y S relaciones sobre un conjunto A .

- a) Si R es reflexiva, también lo es R^{-1} .
- b) Si R y S son reflexivas, también lo son $R \cap S$ y $R \cup S$.
- c) R es reflexiva si y solo si \overline{R} es irreflexiva.

Demostración:

a) Sea R_I la relación de igualdad sobre un conjunto A . Se sabe que R es reflexiva $\Leftrightarrow R_I \subseteq R$ y que $R_I = R_I^{-1}$. Por hipótesis R es reflexiva, o sea que $R_I \subseteq R$ y por el teorema anterior inciso a) $R_I^{-1} \subseteq R^{-1}$ por lo tanto $R_I \subseteq R^{-1}$ pues $R_I = R_I^{-1}$. Esto demuestra que R^{-1} es reflexiva.

b) Por hipótesis $R_I \subseteq R$ y $R_I \subseteq S$, por lo tanto $R_I \subseteq R \cap S$ y $R_I \subseteq R \cup S$ lo que permite afirmar que $R \cap S$ y $R \cup S$ son reflexivas.

c) Se sabe que R es irreflexiva $\Leftrightarrow R \cap R_I = \emptyset$ Por hipótesis, R es reflexiva si y solo si $R_I \subseteq R$, si y solo si $R_I \cap \overline{R} = \emptyset$, si y solo si \overline{R} es irreflexiva.

Teorema 3:

Sea R una relación sobre un conjunto A . Entonces

- a) R es simétrica si y solo si $R \subset R^{-1}$ si y solo si $R = R^{-1}$.
- b) R es asimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$.
- c) R es antisimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} \subset R_I$.

Demostración:

a) Sea $(x, y) \in R$, como R es simétrica significa que $(y, x) \in R$ lo que quiere decir que $(x, y) \in R^{-1}$. Esto demuestra que $R \subset R^{-1}$. Para llegar a demostrar la igualdad solo falta demostrar que $R^{-1} \subseteq R$. Supóngase que $(x, y) \in R^{-1}$ entonces $(y, x) \in R$ y como $R \subseteq R^{-1}$ $(y, x) \in R^{-1}$. Por la definición de R^{-1} se concluye que $(x, y) \in R$ con lo que queda demostrado que $R^{-1} \subseteq R$. Finalmente se debe demostrar que si $R \subset R^{-1} \Rightarrow R$ es simétrica. Supóngase que $(x, y) \in R$ como $R \subseteq R^{-1}$ se tiene que $(x, y) \in R^{-1}$ entonces por definición de relación inversa se concluye que $(y, x) \in R$, por lo que R es simétrica.

b) Si R es asimétrica, quiere decir que no hay pares de tal modo que $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, pero esta condición es equivalente a decir que $(x, y) \in R \cap R^{-1}$. Por lo tanto, la asimetría de R significa que no hay pares (x, y) tales que $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ o sea que $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

c) Si R es antisimétrica significa que si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ entonces $x = y$ como se vio en el inciso anterior, esto se puede reformular como $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ entonces $x = y$. Todos los elementos x e y del conjunto A que cumplen con el antecedente de este condicional son aquellos iguales, o sea $x = y$. Por lo tanto, la antisimetría de R significa que para cada par de elementos x, y , si $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ entonces $(x, y) \in R_I$ lo cual simplemente quiere decir que $R \cap R^{-1} \subset R_I$.

Teorema 4:

Sean R y S relaciones sobre el conjunto A .

a) Si R es simétrica, también lo son R^{-1} y \overline{R} .

b) Si R y S son simétricas, también lo son $R \cap S$ y $R \cup S$.

Demostración:

a) Si R es simétrica, entonces $R = R^{-1}$ y en consecuencia $(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$ lo que significa que R^{-1} también es simétrica. También $(x, y) \in (\overline{R})^{-1}$ si y solo si $(y, x) \in \overline{R}$ si y solo si $(y, x) \notin R$ si y solo si $(x, y) \notin R^{-1} = R$ si y solo si $(x, y) \in \overline{R}$, de modo que \overline{R} también es simétrica.

b) Se demostró anteriormente que $R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}$ como R y S son simétricas se tiene que $R^{-1} = R$ y $S^{-1} = S$, por lo tanto, la unión de dos relaciones simétricas es otra relación simétrica. De manera idéntica se demuestra para la intersección.

4. REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

Hay diversas maneras de representar una relación entre conjuntos finitos; como se vio previamente, una de ellas puede ser enumerando los pares ordenados que la conforman, otra forma es usando una tabla de doble entrada o bien usando un diagrama de flechas. A continuación, se presentarán dos métodos alternativos para representar relaciones: usando matrices y por medio de grafos dirigidos.

4.1. REPRESENTACIÓN MEDIANTE MATRICES BOOLEANAS

Una relación entre conjuntos finitos se puede representar utilizando una matriz booleana. Sea R la relación del conjunto $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ en $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, R puede representarse por medio de la matriz $M_R^{m \times n} = [m_{ij}]$ en donde cada elemento $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, y_j) \in R \\ 0 & \text{si } (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$

Es decir que, la matriz booleana, de dimensión $m \times n$ que representa a R , tendrá un 1 como elemento (i, j) , si x_i está relacionado con y_j , caso contrario, en esa posición tendrá un 0.

Los elementos de los conjuntos A y B están escrito en un orden arbitrario, además cuando $A = B$ se usa la misma ordenación para ambos conjuntos. Esto

quiere decir que la representación de una relación por medio de matrices dependerá de la ordenación de los elementos de los conjuntos A y B, es decir que una misma relación puede estar representada por distintas matrices.

Ejemplos:

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ y $R = \{(x, y) \in R / x > y\}$ es decir que:

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\} \text{ o bien } M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sean los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ¿Qué pares ordenados están en la relación R representada por la siguiente matriz? $M_R =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_4)\}$$

Si el conjunto A tiene n elementos, entonces estos se pueden ordenar (permutaciones) de $n!$ formas distintas. Por lo tanto, una relación definida en un conjunto con n elementos podrá representarse por medio de $n!$ matrices distintas.

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y R definida en A tal que $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$. Los elementos de A se pueden ordenar de 6 maneras distintas ($3! = 6$), las cuales son: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{3, 1, 2\}$ y $\{3, 2, 1\}$. Por lo tanto, R tiene 6 matrices distintas que la representan. Ellas son, para cada ordenación posible, las siguientes.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices de una relación en un conjunto A de n elementos, que siempre son cuadradas, pueden usarse para determinar si la relación cumple o no con determinadas propiedades.

Una relación es reflexiva si todo elemento del conjunto $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ está relacionado consigo mismo. Por lo tanto, R es reflexiva si $(x_i, x_i) \in R$ para $\forall i$. Entonces R es reflexiva si y solo si $m_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$, esto quiere decir que R es reflexiva si todos los elementos de la diagonal principal de M_R son 1.

De manera análoga, una relación R es irreflexiva si ningún elemento está relacionado consigo mismo; en este caso la matriz de la relación deberá contener únicamente ceros en la diagonal principal.

Si la diagonal principal de una matriz que representa una relación, contiene ceros y unos, dicha relación no es ni reflexiva ni irreflexiva.

Esquemáticamente las matrices de relaciones reflexivas e irreflexivas se pueden representar, respectivamente, de la siguiente manera:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

La relación R en $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es simétrica si para todo par ordenado (x_i, y_j) que pertenece a la relación, el par ordenado (y_j, x_i) también pertenece a R . En términos de los elementos de M_R , R es simétrica si y solo si $m_{ij} = 1$, entonces $m_{ji} = 1$. Esto también significa que si $m_{ij} = 0$ entonces $m_{ji} = 0$. Por consiguiente, R es simétrica si solo si, $m_{ij} = m_{ji}$ para todo i, j con $i = 1, 2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, n$. Una forma rápida de ver si la relación

R es simétrica es comparar la matriz de la relación con su traspuesta, si son iguales entonces se concluye que la relación R es simétrica. Por lo tanto, R es simétrica si y solo si $M_R = (M_R)^T$.

La matriz $M_R = [m_{ij}]$ de una relación R asimétrica; satisface la propiedad de que si $m_{ij} = 1$ entonces $m_{ji} = 0$. Si R es asimétrica se desprende que $m_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ vale decir que la diagonal principal de la matriz M_R consta en su totalidad de ceros. Esto es verdadero ya que la propiedad asimétrica implica que si $m_{ii} = 1$ entonces $m_{ii} = 0$ lo cual es una contradicción.

Finalmente la matriz $M_R = [m_{ij}]$ de una relación R antisimétrica; satisface la propiedad de que si $i \neq j$ entonces $m_{ij} = 0$ o bien $m_{ji} = 0$ para todo i, j con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Esquemáticamente las matrices de relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas se pueden representar, respectivamente, de la siguiente manera:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

La relación R en $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es transitiva si el par ordenado (x_i, y_j) y el par (y_j, z_k) pertenecen a la relación, el par (x_i, z_k) debe pertenecer a R. En términos de los elementos de M_R , R es transitiva si y solo si su matriz $M_R = [m_{ij}]$ tiene la propiedad de que si $m_{ij} = 1$ y $m_{jk} = 1$ entonces $m_{ik} = 1$. El antecedente de este enunciado significa simplemente que $M_R^{[2]}$ tiene un 1 en la posición i, k . Así la transitividad de la relación R significa que si $M_R^{[2]3}$

³ $M_R^{[2]} = M_R \odot M_R$. Recordar que el símbolo \odot significa producto booleano.

tiene un 1 en cualquier posición, entonces M_R debe tener un 1 en la misma posición. Por tanto, en particular si $M_R^{[2]} = M_R$, entonces R es transitiva. La inversa de esta proposición no es verdadera.

Ejemplos:

Sean R_1 y R_2 dos relaciones definidas en un conjunto y representadas por sus respectivas matrices.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observando la matriz, se puede decir que la relación no es ni reflexiva ni irreflexiva porque en la diagonal principal existen ceros y unos.

R_1 no es ni simétrica ni asimétrica, en este último caso porque en su diagonal principal existen unos.

R_1 si cumple con las propiedades: antisimétrica y transitiva, en este último caso se puede comprobar fácilmente que $M_{R_1}^{[2]} = M_{R_1}$.

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observando la matriz, se puede decir que la relación es irreflexiva pero no es simétrica. Tampoco es asimétrica ni antisimétrica debido al 1 en las posiciones 1, 4 y 4, 1. Se puede comprobar fácilmente que R_2 no es transitiva.

Las operaciones booleanas de unión e intersección pueden emplearse para determinar las matrices que representan la unión y la intersección de dos relaciones.

Si R_1 y R_2 son dos relaciones en un conjunto A representadas por las matrices M_{R_1} y M_{R_2} , respectivamente, la matriz que representa la unión de estas dos relaciones tiene un 1 en aquellas posiciones en las que bien M_{R_1} o bien M_{R_2} tienen un 1. La matriz que representa la intersección de estas dos relaciones

tiene un 1 en aquellas posiciones en las que tanto M_{R_1} como M_{R_2} tienen un 1. Por lo tanto, las matrices que representan la unión y la intersección de estas relaciones son:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} \quad \text{y} \quad M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

Ejemplo:

Sean R_1 y R_2 dos relaciones en un conjunto A, representadas por las matrices:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Las matrices de } R_1 \cup R_2 \text{ y } R_1 \cap R_2 \text{ son:}$$

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de la composición de relaciones puede hallarse usando el producto booleano de las matrices de las relaciones.

Dados los conjuntos A con m elementos, B con n elementos y C con p elementos. Sean R una relación de A en B y S una relación de B en C. Sean las matrices $M_R^{m \times n} = [r_{ij}]$, $M_S^{n \times p} = [s_{ij}]$ y $M_{S \circ R}^{m \times p} = [t_{ij}]$ las matrices booleanas asociadas a R, S y $S \circ R$ respectivamente. El par ordenado (x_i, y_j) pertenece a $S \circ R$ si y solo si existe un elemento z_k tal que (x_i, z_k) pertenece a R y (z_k, y_j) pertenece a S. Se sigue que $t_{ij} = 1$ si y solo si $r_{ik} = s_{kj} = 1$ para algún k . Por la definición de producto booleano, esto significa que:

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

Ejemplo:

Sean $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ las matrices de las relaciones R y

S, respectivamente, entonces $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Las matrices de la relación complementaria y la relación inversa de una relación R, se pueden obtener a partir de su matriz.

Para obtener la matriz de la relación complementaria, se intercambia en la matriz de R, los unos por ceros y los ceros por uno; mientras que para obtener la matriz de la relación inversa se intercambian, en la matriz de R, filas por columnas, es decir se hace la traspuesta de la matriz de la relación.

Ejemplo:

Sea $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ la matriz de la relación R; entonces:

$$M_{\bar{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2. REPRESENTACIÓN MEDIANTE DÍGRAFOS

Hay otra manera de representar una relación definida en un conjunto, usando una representación gráfica. Cada elemento del conjunto se representa mediante un punto (vértice) y cada par ordenado de la relación se representa mediante una flecha (arista) del vértice x_i al vértice y_j si y solo si $x_i R y_j$. La representación resultante de R se llama grafo dirigido o dígrafo.

Definición:

Un grafo dirigido o dígrafo consta de un conjunto V de vértices y un conjunto E de pares ordenados de elementos de V llamados aristas. Al

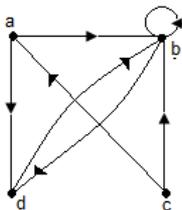
vértice x_i se le llama *vértice inicial de la arista* (x_i, y_j) y al vértice y_j *vértice final de la arista*.

Una arista de la forma (x_i, x_i) se representa usando un arco que conecta al vértice x_i consigo mismo. Una arista de esta forma se llama *bucle*.

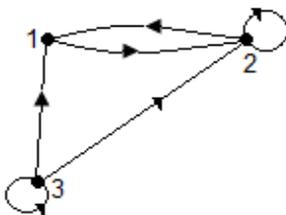
Ejemplo:

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y definida en él:

$R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)\}$ el dígrafo correspondiente es:



El siguiente dígrafo representa una relación en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$



Los pares que forman la relación son:

$$\{(2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

Si una relación R en un conjunto A está representada por el dígrafo que tiene por vértices los elementos de A y por aristas los pares ordenados (x_i, y_j) , tales que $(x_i, y_j) \in R$ entonces esta asignación establece una biyección entre las relaciones en un conjunto A y los dígrafos cuyo conjunto de vértices es A . Así cada afirmación acerca de las relaciones se corresponde con una afirmación acerca de los dígrafos y viceversa.

El dígrafo que representa a una relación puede utilizarse para determinar si la relación cumple, o no, con determinadas propiedades.

Una relación es reflexiva si y solo si hay un bucle en cada vértice del dígrafo, de modo que todos los pares ordenados de la forma (x_i, x_i) pertenecen a la relación; mientras que la relación es irreflexiva si no posee ningún bucle en su dígrafo.

El dígrafo de una relación R simétrica tiene la propiedad de que, si hay una arista del vértice i al vértice j , entonces hay una arista del vértice j al vértice i . En consecuencia, si dos vértices están conectados debe ser por medio de dos aristas, una en cada dirección posible.

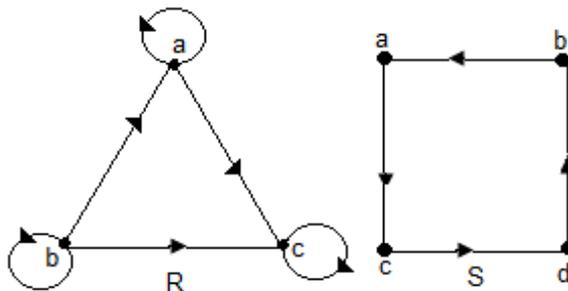
Si R es una relación asimétrica, entonces el dígrafo de R no puede tener simultáneamente una arista del vértice i al vértice j y otra arista del vértice j al vértice i . Esto es cierto para cualquier i y cualquier j y en particular si i es igual a j . En consecuencia, en el dígrafo no puede haber bucles.

Si R es una relación antisimétrica, entonces para diferentes vértices i y j no puede haber una arista del vértice i al vértice j y otra del vértice j al vértice i . Cuando $i = j$ no se impone condición alguna, en consecuencia, el dígrafo puede contener bucles.

Finalmente, una relación es transitiva si y solo si, además de haber una arista uniendo un vértice i con un vértice j y una arista uniendo el vértice j con el vértice k , hay una tercera arista que une i con k . De esta forma las aristas que intervienen forman un triángulo en el que cada una está orientada en la dirección correcta.

Ejemplos:

Sean las relaciones R y S representadas respectivamente por los siguientes dígrafos

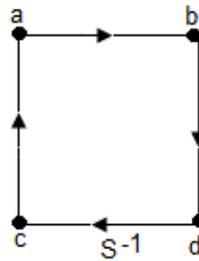
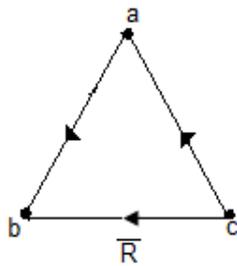


Se puede afirmar, observando el dígrafo de R, que la misma es reflexiva ya que existe un bucle en cada uno de los vértices. También es antisimétrica, pues entre dos vértices distintos solo existe una arista en un solo sentido que las une. Por último, la relación es transitiva.

Respecto de S, se puede observar que la misma es irreflexiva debido a que ningún vértice posee bucle y es antisimétrica. S tampoco es transitiva, ya que hay una arista que une a con c y otra arista que une c con d, pero no hay una arista que una los vértices a y d. S es asimétrica.

A partir del dígrafo de una relación R, se puede hallar el dígrafo de la relación complementaria y el de la relación inversa. Para hallar el dígrafo de la relación complementaria se deben eliminar, del dígrafo que representa el producto cartesiano, las aristas que están en el dígrafo de la relación y para hallar el dígrafo de la relación inversa solo se deben invertir el sentido de cada una de las aristas del dígrafo de la relación R.

Se presentan a continuación el dígrafo de la relación complementaria de R y el dígrafo de la relación inversa de S, definidas en el ejemplo anterior.



5. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Existen relaciones con una combinación particular de propiedades que permiten usarlas para relacionar objetos que son semejantes en algún sentido. Estas relaciones reciben el nombre de “relaciones de equivalencia”.

Definición:

Una relación R en un conjunto A se dice de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos:

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y definida en él la relación:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

La matriz que representa esta relación será:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observando M_R se puede afirmar que la relación es reflexiva (todos los elementos de la diagonal principal son 1) simétrica ($M_R = (M_R)^T$). Se puede comprobar que R es transitiva ($M_R \odot M_R = M_R$). En consecuencia, R es una relación de equivalencia.

Sea \mathbb{Z} el conjunto de números enteros y sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x - y \in \mathbb{Z}\}$

Se puede afirmar que R es reflexiva pues $x - x = 0$ y cero es un número entero. Además, suponiendo que $x - y$ es un número entero, se sigue que $y -$

x es también un número entero, por lo que R es simétrica. Por último, $x - y$ es entero e $y - z$ es entero, entonces $x - z = (x - y) + (y - z)$ es también un entero. En consecuencia, R es una relación de equivalencia.

Sea \mathbb{Z} el conjunto de números enteros y sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x \leq y\}$

Puesto que $x \leq x$, R es reflexiva. Si $x \leq y$ no implica necesariamente que $y \leq x$ por lo tanto R no es simétrica. Se puede afirmar que R no es una relación de equivalencia, aunque incidentalmente sea transitiva ya que si $x \leq y$ y también $y \leq z$ implica que necesariamente es $x \leq z$.

Una relación de equivalencia muy conocida en el conjunto de números enteros, es la relación “congruencia módulo m ”.

Sea m un entero positivo mayor que 1 y la relación:

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x \equiv y \pmod{m}\}$, entonces R es de equivalencia.

En primer lugar, se debe recordar que $x \equiv y \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (x - y)$.

R es reflexiva ya que para todo entero se cumple que:

$x \equiv x \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (x - x)$ o sea que $m \mid 0$ lo que es verdad, pues $0 = m \cdot 0$

Respecto a la simetría, se puede establecer que:

Si $x \equiv y \pmod{m}$ entonces $m \mid (x - y)$. Por lo tanto

$x - y = k \cdot m$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Se sigue que

$y - x = (-k) \cdot m$ de modo tal que

$y \equiv x \pmod{m}$.

Por lo tanto, la congruencia módulo m es simétrica.

Respecto a la transitividad:

Si $x \equiv y \pmod{m}$ entonces $m \mid (x - y)$. Por lo tanto

$x - y = k \cdot m$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ (1)

Si $y \equiv z \pmod{m}$ entonces $m \mid (y - z)$. Por lo tanto
 $y - z = p \cdot m$ para algún $p \in \mathbb{Z}$ (2)

Sumando miembro a miembro (1) y (2) se obtiene

$$\begin{array}{r} x - y = k \cdot m \\ \underline{y - z = p \cdot m} \\ (x - y) + (y - z) = km + pm. \text{ Se sigue que} \end{array}$$

$$x - y + y - z = m(k + p)$$

$$x - z = m(k + p)$$

$$x - z = h \cdot m \text{ con } h = k + p, \quad h \in \mathbb{Z}. \text{ O sea que}$$

$$m \mid (x - z). \text{ Por lo tanto}$$

$$x \equiv z \pmod{m}$$

Esto demuestra que la relación es transitiva.

Se concluye, finalmente, que relación "congruencia módulo m" es una relación de equivalencia.

5.1. CLASES DE EQUIVALENCIA

Las clases de equivalencias son conjuntos que contienen a todos los elementos "y" que están relacionados con otro elemento "x" del conjunto A.

Definición:

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. El conjunto de todos los elementos que están relacionados con algún elemento x de A se llama clase de equivalencia de x. La clase de equivalencia de x con respecto a R se denota por $[x]_R$.

Sea R una relación de equivalencia, entonces la clase de equivalencia del elemento x se define como $[x]_R = \{y / (x, y) \in R\}$

Si se considera una única relación se puede suprimir el subíndice R y se escribe $[x]$ para denotar la clase de equivalencia.

Cualquier elemento de una clase se puede usar como representante de esa clase, es decir no hay nada especial que distinga al elemento concreto elegido como representante de la clase.

Ejemplos:

Se demostró, en los ejemplos anteriores, que la relación R definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es de equivalencia

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

por lo tanto:

$$[1] = \{1, 2, 3\}, [2] = \{1, 2, 3\}, [3] = \{1, 2, 3\} \text{ y } [4] = \{4\}$$

Las clases de equivalencia de la relación de congruencia módulo m se llaman clases de congruencia módulo m . La clase de congruencia módulo m de un entero x se denota por $[x]_m$ por lo tanto se puede establecer que $[x]_m = \{ \dots, x - 2m, x - m, x, x + m, x + 2m, \dots \}$.

Por ejemplo, si $m = 4$, las distintas clases son $[0]_4 = \{ \dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots \}$, $[1]_4 = \{ \dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots \}$, $[2]_4 = \{ \dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots \}$, por último $[3]_4 = \{ \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots \}$

Hay que observar que en ningún caso las clases de equivalencia son vacías ya que la propiedad reflexiva hace que cuando menos contenga un elemento.

5.2. CLASES DE EQUIVALENCIAS Y PARTICIONES

Las clases de equivalencias de una relación de equivalencia definida en un conjunto A dividen a este en subconjuntos disjuntos y no vacíos. El siguiente teorema muestra que las clases de equivalencia de dos elementos del conjunto A son o bien idénticas o bien disjuntas.

Teorema 5:

Sea R una relación de equivalencia definida sobre el conjunto A . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$i) x R y \quad ii) [x] = [y] \quad iii) [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

$$\mathbf{i) } x R y \Rightarrow [x] = [y]$$

Tomamos un elemento arbitrario z tal que $z \in [x]$, entonces $x R z$. Como $x R y$ y R es simétrica se sigue que $y R x$. Como R es transitiva; se sigue que $y R x \wedge x R z$ implica que $y R z$. Por lo tanto $z \in [y]$, lo que demuestra que $[x] \subset [y]$

Tomamos un elemento arbitrario w tal que $w \in [y]$, entonces $y R w$. Como R es transitiva se puede afirmar que $x R y \wedge y R w$ implica que $x R w$. Por lo tanto $w \in [x]$, lo que demuestra que $[y] \subset [x]$.

Como $[x] \subset [y] \wedge [y] \subset [x]$ se sigue que $[x] = [y]$

$$\mathbf{ii) } [x] = [y] \Rightarrow [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

Si $[x] = [y]$ se sigue que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ ya que $[x]$ no es vacía porque $x \in [x]$ al ser R reflexiva.

$$\mathbf{iii) } [x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow x R y$$

Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ se sigue que existe un elemento z con $z \in [x] \wedge z \in [y]$, es decir, $x R z \wedge y R z$. Por la propiedad simétrica de R , $z R y$. Como $x R z \wedge z R y$ por propiedad transitiva $x R y$

Como (i) implica (ii); (ii) implica (iii) y (iii) implica (i) las tres expresiones son equivalentes.

Ahora, se puede mostrar cómo una relación de equivalencia divide un conjunto. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A . La unión de las clases de equivalencia de R es todo el conjunto A , ya que cada elemento $x \in A$

está en su propia clase de equivalencia, es decir, en $[x]_R$. En otras palabras:

$$\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$$

Además, se sigue por el teorema demostrado anteriormente que estas clases de equivalencia o bien son iguales o bien disjuntas, por lo que si $[x]_R \neq [y]_R$, entonces $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

Estas dos observaciones ponen de manifiesto que las clases de equivalencias forman una partición del conjunto A , ya que dividen al conjunto A en subconjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos y cuya unión es el conjunto A .

Ejemplo:

Se mostró anteriormente que:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

es una relación de equivalencia definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y que sus clases de equivalencia son:

$$[1] = \{1, 2, 3\}, [2] = \{1, 2, 3\}, [3] = \{1, 2, 3\} \text{ y } [4] = \{4\}$$

Se puede observar que todas las clases de equivalencia son no vacías, y que además $[1] = [2] = [3]$ y que $[1] \cap [4] = \emptyset$, por lo que se puede afirmar que $\{1, 2, 3\}$ y $\{4\}$ forman una partición de A .

Se mostró que las clases de equivalencia de una relación de equivalencia en un conjunto forman una partición de dicho conjunto. Los subconjuntos de la partición son las clases de equivalencia. A la inversa, ¿cualquier partición de un conjunto se puede utilizar para formar una relación de equivalencia? El siguiente teorema confirma la respuesta afirmativa a esta pregunta.

Teorema 6:

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto S . Entonces las clases de equivalencia de R forman una partición de S . Recíprocamente, dada una partición $\{A_i / i \in I\}$ (donde I es un conjunto de índices) del

conjunto S , hay una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son los conjuntos $A_i, i \in I$

Solo resta demostrar la parte recíproca de este teorema. Para ver esto, se supone que $\{A_i / i \in I\}$ es una partición de S .

Sea R la relación en S que consta de pares (x, y) tales que x e y pertenecen al mismo subconjunto A_i de la partición. Para demostrar que R es una relación de equivalencia se debe demostrar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

R es reflexiva porque para cada x que pertenece a S , (x, x) pertenece a R ya que x está en el mismo subconjunto de la partición que él mismo.

R es simétrica porque si (x, y) pertenece a R , entonces y y x están en el mismo subconjunto de la partición, por lo que (y, x) pertenece a R .

Si (x, y) pertenece a R e (y, z) pertenece a R , entonces x e y están en el mismo subconjunto, por ejemplo X , de la partición, también y con z están en el mismo subconjunto Y , por ejemplo, de la partición. Como los subconjuntos de la partición son disjuntos e y pertenece tanto a X como a Y , se sigue que $X = Y$. En consecuencia x y z pertenecen al mismo subconjunto de la partición, de modo tal que (x, z) pertenece a R . Por lo tanto, R es transitiva. Quedando así demostrado que R es de equivalencia.

De esta manera, el teorema demostrado resume los vínculos que se establecen entre relaciones de equivalencia y particiones.

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considérese la siguiente partición $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$, $A_3 = \{6\}$. Hallar la relación de equivalencia R en A , determinada por la partición dada.

Los subconjuntos de la partición son clases de equivalencia de R . Cada elemento de un subconjunto está relacionado con cada uno de los demás

elementos del mismo bloque y solamente con estos elementos, puesto que el par $(x, y) \in R$ si y solo si x e y están en el mismo subconjunto de la partición. Como $A_1 = \{1, 2, 3\}$ los pares $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ y $(3, 3)$ pertenecen a R . Los pares $(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)$ pertenecen a R , ya que $A_2 = \{4, 5\}$ es también una clase de equivalencia. Finalmente, el par $(6, 6)$ pertenece a la relación. Ningún otro par pertenece a la relación R . Es decir que:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

6. APLICACIONES DE LAS RELACIONES

En muchos casos se establecen relaciones entre los elementos de más de dos conjuntos. Por ejemplo, hay una relación entre el nombre de un estudiante, su número de documento, la carrera en la que está inscripto y la nota media del estudiante. De manera similar hay una relación que vincula la línea aérea, el número de vuelo, el punto de partida, el destino, la hora de salida y la hora de llegada de un vuelo. Un ejemplo de estas relaciones en el ámbito de las matemáticas es la relación de intercalamiento de los puntos de una recta, tal que tres puntos están relacionados cuando el segundo punto está entre el primero y el tercero.

Se presentarán a continuación relaciones entre los elementos de más de dos conjuntos.

6.1. BASE DE DATOS RELACIONALES

Cuando se representa una relación binaria mediante una tabla, esta tiene dos columnas. Con frecuencia es útil permitir que una tabla tenga un número arbitrario de columnas. Si la tabla tiene n columnas, la relación correspondiente se dice *n-aria*.

Por ejemplo, la siguiente tabla “Estudiantes” representa una relación 4-aria y expresa la relación que hay entre apellidos, número de documento, carrera y nota media de estudiantes de una institución educativa.

Tabla: Estudiante			
Apellidos	D N I	Carrera	Nota
Alejo	39.654.853	Ingeniería Informática	7,65
Chorolque	40.518.398	Ingeniería de Minas	6,23
García Moreno	42.760.871	Licenciatura en Cs. Geológicas	8,23
Jaramillo	38.421.908	Analista Programador Universitario	9,21
Kramich	44.511,309	Licenciatura en Sistemas	4,34
Mamani Quispe	38.456.081	Ingeniería Informática	5,67
Poclava	37.384.816	Licenciatura en Sistemas	7,90
Santander	40.432.765	Analista Programador Universitario	6,66

La tabla anterior se puede expresar como el conjunto:

{(Alejo, 39.654.853, Ingeniería Informática, 7,65), (Chorolque, 40.518.398, Ingeniería de Minas, 6,23), (García Moreno, 42.760.871, Licenciatura en Cs. Geológicas, 8,23), (...), (Santander, 40.432.765, Analista Programador Universitario, 6,66)}.

Una *base de datos* es una colección de registros que maneja una computadora. El tiempo que requiere manipular la información en una base de datos depende de cómo esté almacenada la información. Las operaciones de añadir y borrar registros, actualizar registros, buscar determinados registros, así como combinar registros de bases de datos que se solapan, se llevan a cabo muchísimas veces al día en una base de datos grande. Debido a la importancia de estas operaciones, se han desarrollado diversos métodos para representar las bases de datos. Uno de estos modelos llamado

modelo de base de datos relacional inventado por Edgar Frank Codd (1970), se basa en el concepto de una relación *n-aria*.

Se realizará una breve introducción de algunas ideas fundamentales en la teoría de bases de datos relacionales, ya que no es intención ahondar en dicho tema, sino presentar una aplicación del tema que se estudia: Relaciones.

Las columnas de una relación *n-aria* se llaman *atributos* (o *campos*). El dominio de un atributo es un conjunto al que pertenecen todos los elementos de ese atributo. Por ejemplo, en la tabla Estudiantes, el atributo Nota puede tomarse como el conjunto de todos los números reales mayores a cero y menores que 10. El atributo Apellidos puede tomarse como todas las cadenas en el alfabeto con longitud 30 o menor. Un solo atributo o combinación de atributos para una relación es una *clave* (o *llave*), si los valores de los atributos definen de manera única una *n-tupla*. Por ejemplo, en la tabla Estudiante se puede tomar el atributo “el número de documento” como una clave, ya que se supone que cada persona tiene un único número de identificación. El atributo Apellidos no es una clave porque es posible que diferentes personas tengan el mismo apellido.

Un sistema de administración de bases de datos responde a *consultas*. Una consulta es una petición de información de la base de datos. Estas peticiones permiten, por ejemplo, responder preguntas como: ¿qué estudiantes tienen una nota media mayor o igual a 5,5?, ¿qué estudiantes cursan la carrera Analista Programador Universitario? Se analizarán varias operaciones sobre las relaciones que se utilizan para responder a las consultas en el modelo de base de datos relacional.

Selección:

El operador selección elige ciertas *n-tuplas* de una relación. Las elecciones se hacen estableciendo condiciones sobre los atributos. Por ejemplo, para la

relación establecida en la tabla Estudiante: Estudiante [Nota > 8] seleccionará los siguientes cuartetos:

(García Moreno, 42.760.871, Licenciatura en Cs. Geológicas, 8,23),

(Jaramillo, 38.421.908, Analista Programador Universitario, 9,21)

Proyección:

Mientras que el operador selección elige filas de una relación (tabla) el operador proyección elige columnas. Además, elimina los duplicados. Por ejemplo, para la relación Estudiante:

Estudiante [Apellidos, Nota] seleccionará las parejas:

(Alejo, 7,65) (Chorolque, 6,23) (García Moreno, 8,23)

(Jaramillo, 9,21) (Kramich, 4,34) (Mamani Quispe, 5,67)

(Poclava, 7,90) (Santander, 6,66).

Unión:

Los operadores selección y proyección manejan una sola relación; la unión maneja dos relaciones.

La operación unión sobre las relaciones R_1 y R_2 comienza por examinar todos los pares de n -tuplas, una de R_1 y otra de R_2 . Si la condición de unión se satisface, las n -tuplas se combinan para formar nuevas n -tuplas. La condición de unión especifica una relación entre un atributo de R_1 y un atributo de R_2 . Por ejemplo, se realizará una operación unión sobre las tablas: Docente y Horario. Como condición se tomará $Cod_asig = Num_asig$.

Se presentan a continuación las tablas: Docentes y Horarios.

Tabla: Docente		
Profesor	Depto.	Cod_asig
Condori	Matemática	224
Condori	Matemática	321
Grageda	Química	675
Grageda	Química	876
Medina	Física	345
Medina	Física	598
Pérez	Informática	378
Pérez	Informática	034

Tabla: Horario			
Depto.	Num_asig	Aula	Hora
Informática	378	I11	14:00
Física	598	F45	15:30
Química	675	Q46	18:45
Matemática	224	M97	17:00
Informática	139	I34	09:00
Física	345	F48	10:30
Matemática	321	M76	11:45
Química	876	Q90	19:30

Tomamos una fila de la tabla Docente y una de Horario y si se cumple que $Cod_asig = Num_asig$, se combinan las filas. Por ejemplo, la primera fila de la tabla Docente coincide con la cuarta fila de la tabla Horario, es decir que, ($Cod_asig = Num_asig = 224$). Estas n-tuplas se combinan escribiendo primero la de la tabla Docente seguida de la n-tupla de la tabla Horario y eliminando los elementos iguales en los atributos especificados. Obteniéndose:
(Condori, Matemática, 224, M97, 17:00).

Esta operación se expresa como: Docente [$Cod_asig = Num_asig$] Horario. La relación obtenida al ejecutar esta unión se muestra en la siguiente tabla.

Tabla: Docente [$Cod_asig = Num_asig$] Horario				
Profesor	Depto.	Cod_asig	Aula	Hora
Condori	Matemática	224	M97	17:00
Condori	Matemática	321	M76	11:45
Grageda	Química	675	Q46	18:45
Grageda	Química	876	Q90	19:30
Medina	Física	345	F48	10:30
Medina	Física	598	F45	15:30
Pérez	Informática	378	I11	14:00

En otras palabras, el operador unión produce a partir de dos relaciones una nueva relación combinando todas las n-tuplas de la primera relación con todas las n-tuplas de la segunda relación.

Casi todas las consultas a una base de datos relacional requieren varias operaciones para proporcionar la respuesta.

6.2. UNA LISTA ENLAZADA ES UNA RELACIÓN

Mediante un ejemplo se evidenciará cómo una lista enlazada es una relación.

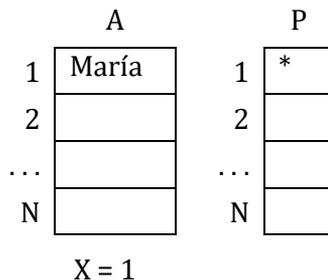
Sea A un vector (matriz) de dimensión N que contiene nombres de personas, los que fueron colocados según el orden de llegada, sea P otro vector de la misma dimensión para guardar la dirección del siguiente nombre y sea X la variable que guarda la posición en donde inicia la tabla de nombres.

- a) Si el orden en que llegan los nombres es: María, Juan, Ana, Pedro, Jaime ¿Cuál es el valor de la variable X y como quedarían los vectores A y P?
- b) ¿Cuál es el dígrafo de la relación formada por los vectores A, P y la variable X?
- c) Supóngase que se dan de alta los nombres: Benito y Luis y se da de baja a Juan ¿Cómo quedaría la información en los vectores y cuál es el dígrafo?

Solución de a):

Considérese que los vectores A y P están vacíos y que la variable que indica el inicio de la lista es $X = *$ en donde * significa fin de la lista.

Al llegar el primer nombre, los vectores quedan de la siguiente manera



La variable $X = 1$ indica que el primer nombre de la lista está en la posición 1 del vector A. El * en P indica que ya no hay más nombres y ahí termina la lista. Cuando llega el segundo nombre, los vectores tienen la siguiente información:

	A		P
1	María	1	*
2	Juan	2	1
...		...	
N		N	

$X = 2$

Como el nombre Juan se coloca alfabéticamente antes que María, ahora la variable que indica el inicio de la lista apunta a la posición de ese nombre $X = 2$. En esa posición, pero para el arreglo P, se coloca el número 1 que indica que la posición del siguiente nombre a recorrer está en la posición 1 del vector A y el * en P significa que ahí termina la lista.

Al agregar los nombres de Ana, Pedro y Jaime, los vectores quedan como se muestra a continuación:

	A		P
1	María	1	4
2	Juan	2	1
3	Ana	3	5
4	Pedro	4	*
5	Jaime	5	2
...		...	
N		N	

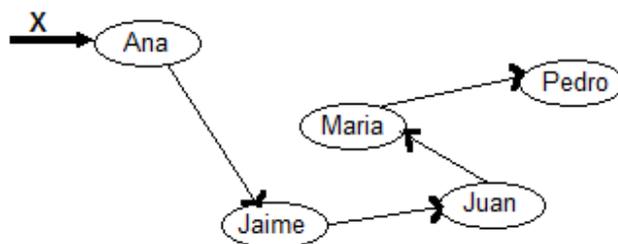
$X = 3$

Obsérvese que al colocar la información de esta forma es posible recorrerla en orden alfabético, permitiendo así un acceso más rápido. El primer nombre está en la posición 3 ($X = 3$ en el vector A), el que le sigue está en la posición 5 (Jaime) como lo indica el vector P . El que le sigue en la posición 2 (Juan) como lo indica el vector P y así sucesivamente hasta llegar al final de la lista indicada por $*$.

En el contexto de Estructura de Datos, esta manera de arreglar la información se conoce como lista enlazada, ya que tiene la ventaja de que cuando se busque algo se encuentre de manera más eficiente. Por ejemplo, si se busca el nombre de Jaime se encontrará en el segundo paso, ya que está inmediatamente después de Ana y no es necesario recorrer toda la lista. Si se buscará un nombre que no existe en el vector, por ejemplo Carlos, y si se hiciera un programa que, además de recorrer la información, comparara alfabéticamente los nombres, en el segundo paso se mandaría el mensaje de que Carlos no está en la lista.

Esta lista enlazada es una relación en la que los nodos son los nombres de las personas y la flecha que relaciona los nodos es la información del arreglo P . Además de que se indica en dónde comienza el recorrido de la información.

Solución de b)



Solución de c)

Debe considerarse que cada vez que se da de alta un nuevo nombre (Benito y Luis), se llevan a cabo los ajustes necesarios en los apuntadores y cuando se da

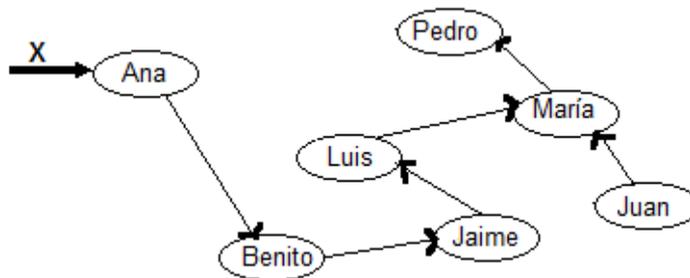
de baja a alguna persona, simplemente se realiza la desconexión correspondiente (Juan).

Después de dar de alta los nombres de Benito y Luis, y de baja el de Juan, los vectores quedan de la siguiente manera:

	A		P
1	María	1	4
2	Juan	2	1
3	Ana	3	6
4	Pedro	4	*
5	Jaime	5	7
6	Benito	6	5
7	Luis	7	1
...		...	
N		N	

$X = 3$

Por otro lado, el dígrafo queda de la siguiente manera:



En este dígrafo se puede observar que al desconectar el nodo Juan, no tiene ninguna flecha apuntando hacia él, y aunque él tiene una flecha que apunta hacia María, esta no importa, ya que ella no produce ningún efecto. Para no

desperdiciar espacio, en la memoria se puede guardar una lista de espacios disponibles y se pueden volver a ocupar cuando se necesiten, de forma que al lugar en donde está Juan se le pondría una marca y, posteriormente, se ocuparía ese lugar para guardar otro nombre que se quisiera dar de alta.

Lo importante en este caso es observar que una lista enlazada es una relación. Pero, aunque en los nodos solamente se presenta un dato, realmente puede ser el registro de un archivo o bien una fila de una tabla en donde no solo se tenga el nombre de la persona, sino otros datos como edad, dirección, código postal, etc. De esta forma, al llegar al nombre de una persona, se puede acceder también a la información restante.

TRABAJO PRÁCTICO: RELACIONES

1. Enumerar los pares ordenados de la relación R definida de

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ en } B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B / x + y = 4\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B / x \geq y\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in A \times B / x = 2y\}$$

$$R_4 = \{(x, y) \in A \times B / \text{mcd}(x, y) = 1\}$$

2. a) Enumerar los pares ordenados de la relación R en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$R_1 = \{(x, y) \in A^2 / x \mid y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A^2 / x = y\}$$

- b) Representar las relaciones del inciso anterior mediante diagrama de flechas y tabla de doble entrada.

3. Determinar qué propiedades cumplen las siguientes relaciones.

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \text{ definida en } A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \text{ definida en } A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y \geq 0\}$$

4. Sean A el conjunto de estudiantes de la Facultad de Ingeniería y B el conjunto de los libros de la Biblioteca de la Facultad. Sean:

$$R_1 = \{(x, y) / y \text{ es de lectura obligatoria par el estudiante } x\}$$

$$R_2 = \{(x, y) / \text{el estudiante } x, \text{ ha leído el libro } y\}$$

- Describir los pares ordenados de las relaciones: $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ y $R_2 - R_1$

5. Sean las relaciones

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$$

Determinar:

a) $R_1 \cap R_2$

b) $R_1 \cup R_2$

c) $R_2 \cap R_3$

d) $R_2 \circ R_3$

e) $R_1 \circ R_1$

f) $R_3 \circ R_3$

6. Para cada una de las siguientes relaciones, determinar \overline{R} y R^{-1}

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x < y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^{+2} / x \mid y\}$$

7. **a)** Enumerar los pares ordenados de las relaciones en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ que corresponden a las siguientes matrices (las filas y columnas de las matrices corresponden a los enteros escritos en orden ascendente).

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Determinar qué propiedades cumplen las relaciones representadas por las matrices del inciso anterior.

8. Sea R la relación representada por la matriz $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar la

matriz que representa a \overline{R} y R^{-1}

9. Sean R_1 y R_2 relaciones en un conjunto A representadas por las matrices

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

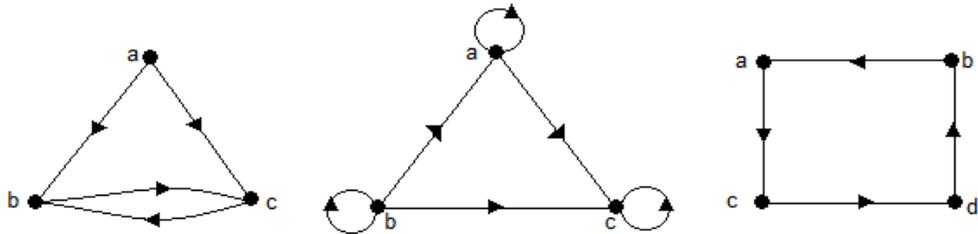
Hallar las matrices que representan a las siguientes relaciones:

a) $R_1 \cup R_2$, **b)** $R_1 \cap R_2$, **c)** $R_2 \circ R_1$, **d)** $R_1 \circ R_2$

10. a) Dibujar los dígrafos que representan las relaciones del punto 2a).

b) Dibujar los dígrafos que representan las relaciones del punto 3) R_1 y R_2 .

11. a) Enumerar los pares ordenados de las relaciones que corresponden a los siguientes dígrafos



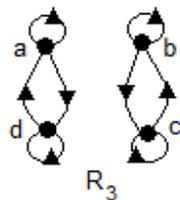
b) Determinar qué propiedades cumplen las relaciones representadas por los dígrafos del inciso anterior.

12. a) Determinar si las siguientes relaciones son o no de equivalencia.

$R_0 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ definida en el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$R_1 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ definida en el conjunto A

$R_2 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$ definida en $A = \{a, b, c\}$



$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Demostrar que la equivalencia proposicional es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las fórmulas proposicionales.

13. Determinar las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia del inciso 12a).

14. Enumera los pares ordenados de las relaciones de equivalencia producidas por las siguientes particiones de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

a) $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

c) $\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

b) $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$

d) $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

AUTOEVALUACIÓN: RELACIONES

1. Responder Verdadero o Falso, NO justificar la respuesta.

a) Una relación R en un conjunto A; se define de la siguiente manera $R = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$

--

b) Sea R una relación en el conjunto A, si $\forall x \in A: (x, x) \notin R \Rightarrow R$ es reflexiva.

--

c) La matriz de una relación definida en un conjunto A es siempre cuadrada.

--

d) El dígrafo de una relación R simétrica tiene la propiedad de que si hay una arista del vértice i al vértice j, entonces hay una arista del vértice j al vértice i.

--

e) Sean R y S relaciones sobre el conjunto A, si R es simétrica, R^{-1} y \bar{R} también son simétricas.

--

2. Completar con la respuesta correcta.

a) Sea el conjunto A, $R_I = \{(x, x) / x \in A\}$ y R, si ocurre que $R_I \subset R$, entonces se dice que R es.....

b) Sean A y B dos conjuntos y R una relación definida de A en B, la relación complementaria de R se define como $\bar{R} = \{.....\}$

c) Sean R y S relaciones reflexivas sobre un conjunto A, entonces las relaciones $R \cap S$ y $R \cup S$ son.....

d) Sea R una relación definida en el conjunto A, si $M_R = (M_R)^T$, entonces se dice que R es.....

e) Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. El conjunto de todos los elementos que están relacionados con algún elemento x de A se llama.....

3. Escribir en el recuadro y con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) Sea R una relación definida en A si se cumple que:

$\forall x, y \in A: x \neq y \Rightarrow ((x, y) \notin R \vee (y, x) \notin R)$ entonces R es:

A) Antisimétrica B) Asimétrica C) Irreflexiva D) Reflexiva

b) Si el dígrafo que representa una relación R tiene un bucle en cada vértice, significa que R es

A) Antisimétrica B) Asimétrica C) Irreflexiva D) Reflexiva

c) Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia definida en A , dividen a este conjunto en

A) Solamente subconjuntos disjuntos B) Solamente subconjuntos no vacíos

C) Subconjuntos disjuntos y no vacíos D) Subconjuntos vacíos y no vacíos

d) Cualquier partición de un conjunto se puede utilizar para formar una relación de equivalencia

A) A veces B) Nunca C) Siempre

e) Sea R una relación de equivalencia definida sobre el conjunto A . Entonces

A) $x R y$ B) $[x] = [y]$ C) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ D) Todas son verdaderas

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN: RELACIONES

Para cada uno de los siguientes enunciados, escribir el programa o subrutina solicitado. En cada caso, el usuario deberá ingresar:

1. Un entero positivo n , y se deberá mostrar la cantidad de todas las posibles relaciones en un conjunto con n elementos. Si n es menor que cuatro, se deberá mostrar también las relaciones.
2. La matriz que representa una relación, se deberá visualizar la misma y determinar si la relación es o no reflexiva y/o irreflexiva.
3. La matriz que representa una relación, se deberá visualizar la misma y determinar si la relación es o no simétrica y/o antisimétrica.
4. La matriz que representa una relación, se deberá visualizar la misma y determinar si la relación es o no transitiva.
5. Las matrices que representan a dos relaciones (R_1, R_2), se deberán visualizar las mismas y también la matriz que representa la composición de ellas ($R_1 \circ R_2$ y $R_2 \circ R_1$).
6. Los vértices y las aristas del dígrafo que representan una relación, se deberá mostrar la gráfica del dígrafo y determinar si la relación es o no reflexiva y/o irreflexiva.
7. Los vértices y las aristas del dígrafo que representan una relación, se deberá mostrar la gráfica del dígrafo y determinar si la relación es o no simétrica y/o antisimétrica.
8. Los pares ordenados que pertenecen a una relación, se deberá visualizar los pares ordenados de la relación, de la relación complementaria y de la relación inversa.

9. Los pares ordenados que pertenecen a dos relaciones (R_1, R_2) , se deberá visualizar los pares ordenados de ambas relaciones y los que resultan de la composición de ellas $(R_1 \circ R_2$ y $R_2 \circ R_1)$

10. Los pares ordenados que pertenecen a dos relaciones (R_1, R_2) , se deberá visualizar los pares ordenados de ambas relaciones y los que resultan de la unión, intersección y diferencia de ellas.

11. Los pares ordenados que pertenecen a dos relaciones (R_1, R_2) , se deberá visualizar las matrices que corresponden a las relaciones, la matriz que resulta de la unión y de la intersección de las relaciones.

12. Una relación de equivalencia, se deberá mostrar la misma y las clases de equivalencias correspondientes.

13. La partición de un conjunto, se deberá mostrar las mismas y la relación de equivalencia que determina esa partición.

BIBLIOGRAFÍA

Disset, L. (2004). *Apuntes de Clases – Matemática Discreta*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile.

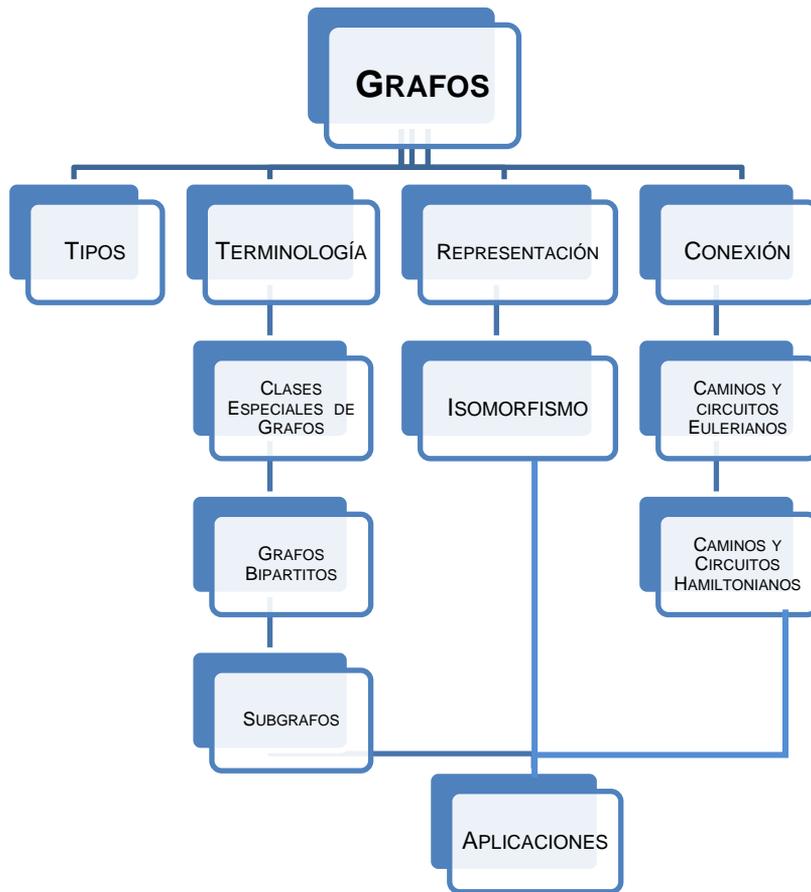
Jiménez Murillo, J. (2011). *Matemática para la computación*. (Primera edición). México: Alfa Omega Grupo editor S. A.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. (Sexta edición). (Traducción de Gonzales Osuna, M.). México: Pearson Educación Prentice Hall.

Kolman, B.; Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de Matemáticas discretas para la Computación*. (Tercera edición). (Traducción de: Palmas Velasco, O.). México: Editorial: Prentice – Hall Hispanoamericana S. A.

Rosen, K. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (Quinta edición). (Traducción de Pérez Morales y otros). España: Editorial Mc Graw Hill.

GRAFOS



OBJETIVOS

- ✓ Incorporar la terminología y simbología propia de la teoría de grafos.
- ✓ Reconocer las características de los grafos.
- ✓ Aplicar la teoría de grafos a problemas que se puedan resolver con las técnicas de esta teoría.
- ✓ Representar grafos por medio de matrices.
- ✓ Saber qué condiciones debe tener un grafo para poseer un circuito euleriano o hamiltoniano.
- ✓ Establecer cuándo dos grafos son isomorfos.
- ✓ Aplicar los conceptos de la teoría de grafos en un lenguaje de programación.

GRAFOS

1. INTRODUCCIÓN

A pesar de que la primera publicación sobre la teoría de grafos data del año 1736 y de que muchos resultados importantes se obtuvieron en el siglo XIX, no fue sino hasta 1920 que surgió un amplio y sostenido interés por esta teoría. Una de las razones del interés por los grafos es, sin duda alguna, su aplicabilidad en diversos campos.

Los grafos pueden utilizarse, por ejemplo, para determinar si se puede o no implementar un circuito sobre una placa de una sola capa. Se pueden diferenciar dos compuestos químicos que tengan la misma fórmula molecular, pero distinta estructura por medio de grafos. Se pueden utilizar los grafos para programar exámenes u organizar un torneo de fútbol “todos contra todos”.

Particularmente, en ciencias de la computación, se pueden utilizar grafos para estudiar la estructura de la Red de Internet o para determinar si dos computadoras están conectadas o no por un enlace empleando modelos de grafos para redes informáticas.

2. TIPOS DE GRAFOS

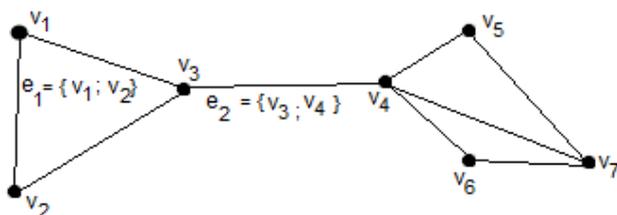
Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y de aristas que conectan entre sí esos vértices. Hay varios tipos de grafos, que se diferencian entre sí por el tipo y el número de aristas que pueden conectar cada par de vértices.

Definición:

Un grafo simple $G = (V, E)$ consta de V , un conjunto no vacío de vértices, y de E un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V . A estos pares se los llama aristas.

Los grafos admiten una representación gráfica, de ahí su nombre. Los vértices se representan por puntos y las aristas por líneas que conectan pares de vértices. Esta representación es de gran ayuda para estudiar propiedades de grafos no demasiado grandes. Por otro lado, el carácter intuitivo de estas representaciones sirve para formular y entender argumentos abstractos.

El siguiente es un ejemplo de grafo simple.



Debe observarse que los grafos simples no admiten la existencia de aristas múltiples entre pares de vértices, es decir, más de una arista conectada a un mismo par de vértices. Además, no se puede usar simplemente un par de vértices para especificar la arista de un grafo si hay aristas múltiples. Para salvar esta situación se definen los multigrafos.

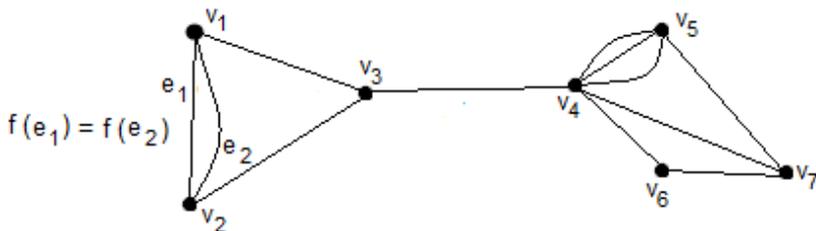
Definición:

Un multigrafo $G = (V, E)$ consta de V , un conjunto no vacío de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\} / u, v \in V, u \neq v\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$

Debe observarse que las aristas múltiples en un multigrafo están asociadas a un mismo par de vértices. No obstante, se dice que $\{u, v\}$ es una arista del grafo $G = (V, E)$ si hay, al menos, una arista e con $f(e) = \{u, v\}$. No se hará distinción entre la arista e y el conjunto $\{u, v\}$ asociado, a no ser que la identidad de alguna de las aristas múltiples en particular sea importante.

La relación entre los grafos simples y los multigrafos es la siguiente. “Todo grafo simple es un multigrafo. Sin embargo, no todos los multigrafos son grafos simples, pues en un multigrafo puede haber dos o más aristas conectando un mismo par de vértices”.

El siguiente es un ejemplo de multigrafo.



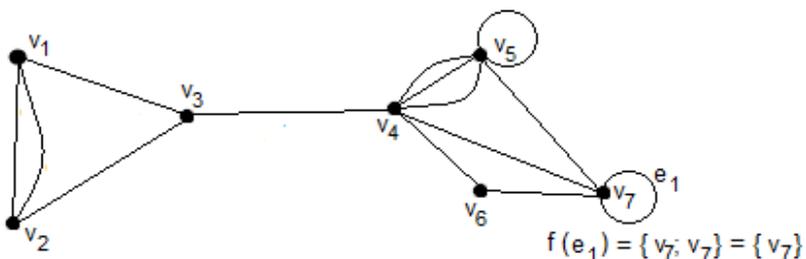
En la definición de multigrafo se establece una función f , cuyo conjunto de partida es E y el de llegada $\{\{u, v\} / u, v \in V, u \neq v\}$. En este último conjunto se pone como condición que los vértices u y v deben ser distintos. Esto trae como consecuencia la no aceptación de “bucles”, es decir, aristas que conectan un vértice consigo mismo. En lugar de multigrafos, se puede utilizar pseudografos, que son más generales que los multigrafos ya que una arista de un pseudografo puede conectar un vértice consigo mismo.

A fin de definir formalmente los pseudografos, es necesario asociar aristas a conjuntos que contengan un solo vértice.

Definición:

Un pseudografo $G = (V, E)$ consta de V , un conjunto no vacío de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\} / u, v \in V\}$. Se dice que una arista e es un bucle o lazo si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$.

El siguiente es un ejemplo de pseudografo.



En la definición de grafo simple se establece un conjunto E de pares no ordenados de elementos distintos de V , y a estos pares se los llama aristas. Esto mismo ocurre en la definición de multigrafo y pseudografo. El hecho de que las aristas sean pares no ordenados de vértices, trae como consecuencia que sea lo mismo la arista $\{u, v\}$ que la $\{v, u\}$. Ahora bien, si se establece el conjunto E como un conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V , se habla, en este caso, de grafos dirigidos o dígrafos.

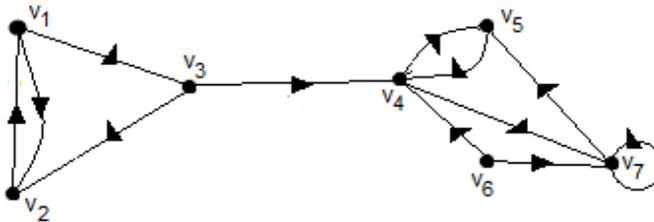
Las aristas de un dígrafo son pares ordenados. Se admiten bucles, pares ordenados con sus dos elementos iguales, pero no se admiten aristas múltiples en la misma dirección entre los vértices.

Definición:

Un grafo dirigido $G = (V, E)$ consta de V , un conjunto no vacío de vértices, y de E un conjunto de pares ordenados de elementos de V . A estos pares se los llama aristas.

Se utiliza una flecha apuntando desde u hacia v para indicar la dirección de la arista (u, v)

El siguiente es un ejemplo de grafo dirigido.



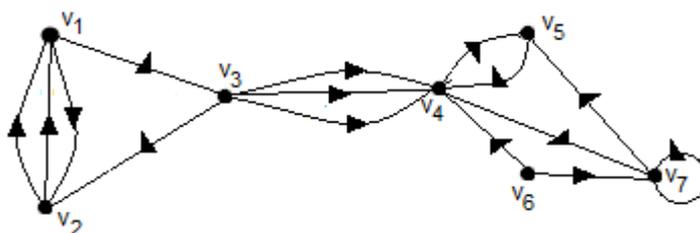
Finalmente, si se aceptan aristas dirigidas múltiples desde un vértice a un segundo vértice se habla de multigrafos dirigidos. Eventualmente, estos vértices pueden coincidir, ser uno solo, vale decir que también es posible la existencia de bucles o lazos.

Definición:

Un multigrafo dirigido $G = (V, E)$ consta de V , un conjunto no vacío de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{(u, v) / u, v \in V\}$.

Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.

El siguiente es un ejemplo de multigrafo dirigido.



Obsérvese que las aristas dirigidas múltiples están asociadas a un mismo par de vértices. No obstante esto, se dice que (u, v) es una arista del grafo $G = (V, E)$ si hay al menos una arista e con $f(e) = (u, v)$. No se hará

distinción entre la arista e y el par ordenado (u, v) asociado, a no ser que la identidad de alguna de las aristas múltiples, en particular, sea importante.

La siguiente tabla resume las características de los diferentes tipos de grafos, definidos anteriormente.

Tipos	Aristas	¿Aristas múltiples?	¿Bucles?
Simple	No dirigidas	No	No
Multigrafo	No dirigidas	Sí	No
Pseudografo	No dirigidas	Sí	Sí
Grafo dirigido	Dirigidas	No	Sí
Multigrafo dirigido	Dirigidas	Sí	Sí

La palabra “grafo” se utilizará para describir grafos con aristas dirigidas o no dirigidas, con o sin bucles y aristas múltiples.

Los términos grafos no dirigidos o pseudografos, se utilizarán para indicar grafos no dirigidos que pueden tener aristas múltiples y bucles.

El adjetivo dirigido se usará para referirse a grafos cuyas aristas estén asociadas a pares ordenados o bien se usará el término dígrafo.

3. TERMINOLOGÍA EN TEORÍA DE GRAFOS

Debido a que el interés por la teoría de grafos es relativamente reciente y a que tiene aplicaciones en muy diversas disciplinas, se emplean muchas terminologías distintas. Por esta razón se introducirá, a continuación, la terminología básica aquí utilizada; sugiriéndose que, al consultar alguna bibliografía, se asegure qué sentido se le da exactamente a los distintos términos utilizados en dicha bibliografía.

3.1. TERMINOLOGÍA BÁSICA

Se verá a continuación la terminología que describe los vértices y aristas de grafos no dirigidos.

Definición:

Se dice que dos vértices u y v de un grafo no dirigido G , son adyacentes si $\{u, v\}$ es una arista de G . Si $e = \{u, v\}$ se dice que la arista e es incidente con los vértices u y v . Se dice que los vértices u y v son extremos de la arista e .

Para determinar cuántas aristas son incidentes en un vértice, se introduce la siguiente definición:

Definición:

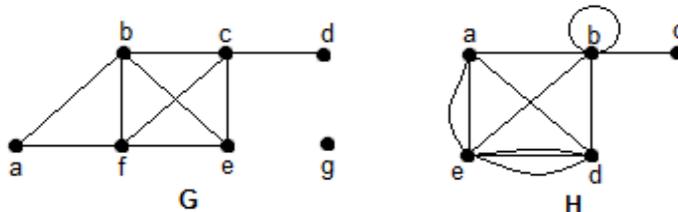
El grado de un vértice de un grafo no dirigido G , es el número de aristas incidentes en él, exceptuando los bucles, cada uno de los cuales contribuye con dos unidades al grado del vértice. El grado del vértice v se denota por $\delta(v)$.

Ejemplo:

Compruébese que en los grafos G y H se cumple que:

En G : $\delta(a) = 2$, $\delta(b) = \delta(c) = \delta(f) = 4$, $\delta(d) = 1$, $\delta(e) = 3$ y $\delta(g) = 0$

En H : $\delta(a) = 4$, $\delta(b) = \delta(e) = 6$, $\delta(c) = 1$ y $\delta(d) = 5$



A los vértices de grado cero se los llama vértices aislados. Claramente, un vértice aislado no es adyacente a ningún otro vértice. Un ejemplo es el vértice g del grafo G . Se dice que un vértice es una hoja, si y sólo si tiene grado 1. Por lo tanto, una hoja es adyacente a exactamente un vértice distinto de ella. Un ejemplo es el vértice d del grafo G .

¿Qué sucede cuando se suman los grados de todos los vértices de un grafo no dirigido $G = (V, E)$?

Cada arista contribuye con dos unidades a la suma de los grados de los vértices, ya que incide en dos de ellos (con la posibilidad de que sean iguales). Esto significa que la suma de los grados de los vértices es el doble del número de aristas. Esto se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1:

La suma de los grados $\delta(v)$ para todos los vértices v de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es el doble del número de aristas.

$$\text{Sea } G = (V, E) \Rightarrow \sum_{v \in V} \delta(v) = 2 | E |$$

Nótese que esto es válido incluso cuando hay aristas múltiples y bucles en el grafo.

Demostración:

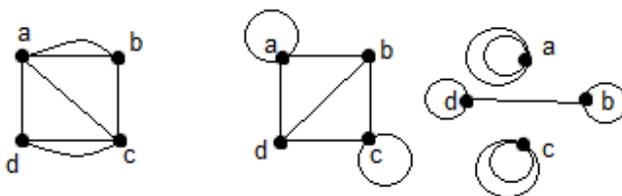
Como $\delta(v_i)$ es el número de aristas que tienen al vértice v_i por extremo, entonces en la siguiente sumatoria:

$\sum_{v \in V} \delta(v) = \delta(v_1) + \delta(v_2) + \dots + \delta(v_n)$ se cuentan todas las aristas del grafo, pero dos veces, puesto que toda arista tiene dos vértices en los extremos. Es decir que la arista $\{v_i, v_j\}$ está contada dos veces, una en $\delta(v_i)$ y otra en $\delta(v_j)$, por lo tanto, se puede afirmar que: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 | E |$. Quedando así, demostrado el teorema.

Ejemplo:

Los grados de un grafo de cuatro vértices son: $\delta(a) = \delta(c) = 4$ y $\delta(b) = \delta(d) = 3$. ¿Cuántas aristas tiene el grafo? Representar un grafo que cumpla con estas condiciones.

Como la suma de los grados de los vértices es 14, se sigue que el grafo tiene siete aristas. Algunos de los posibles grafos que cumplen las condiciones establecidas son los siguientes:



El teorema 1 indica que la suma de los grados de los vértices de un grafo no dirigido es un número par. Este hecho trae diversas consecuencias, una de las cuales se da en el siguiente teorema.

Teorema 2:

Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración:

Sean V_p y V_i el conjunto de vértices de grado par y el conjunto de vértices de grado impar, respectivamente, de un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Entonces

$$2 | E | = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_p} \delta(v) + \sum_{v \in V_i} \delta(v).$$

Como $\delta(v)$ es par si $v \in V_p$, el primer sumando de la última igualdad es par. Además, la suma de los dos sumandos de dicho término es par, puesto que esa suma es $2 | E |$. Por lo tanto, el segundo sumando también es par. Como todos los términos que se suman en ese segundo sumando son impares, tiene que

haber un número par de ellos. Por lo tanto, hay un número par de vértices de grado impar, quedando demostrado así el teorema.

Particularmente, si los grados de todos los vértices de un grafo son iguales, se dice que el grafo es regular.

Por otro lado, para el caso de grafos dirigidos, la terminología refleja el hecho de que a las aristas de estos grafos se les asigna un sentido.

Definición:

Si (u, v) es una arista del grafo dirigido G , se dice que u es adyacente a v y que v es adyacente desde u . El vértice u se llama vértice inicial de la arista y v vértice final. Los vértices inicial y final de un bucle coinciden.

Como las aristas de un grafo dirigido son pares ordenados, se puede refinar la definición de grado de un vértice con el propósito de reflejar el número de aristas que tienen a ese vértice como vértice inicial o como vértice final.

Definición:

En un grafo dirigido el grado de entrada de un vértice v , denotado por $\delta^-(v)$, es el número de aristas que tienen a v como vértice final. El grado de salida de un vértice v , denotado por $\delta^+(v)$, es el número de aristas que tienen a v como vértice inicial.

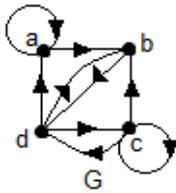
Nótese que un bucle contribuye con una unidad tanto al grado de entrada como al de salida del vértice correspondiente.

Ejemplo:

Sea el grafo dirigido G , compruébese que en el mismo se cumple lo siguiente.

Los grados de entrada son: $\delta^-(a) = 2$, $\delta^-(b) = 3$, $\delta^-(c) = 2$ y $\delta^-(d) = 2$

Los grados de salida son: $\delta^+(a) = 2$, $\delta^+(b) = 1$, $\delta^+(c) = 3$ y $\delta^+(d) = 3$



Como cada arista tiene un vértice inicial y uno final, la suma de los grados de entrada y la suma de los grados de salida de todos los vértices de un grafo dirigido coinciden. Ambas sumas son iguales al número de aristas que tiene el grafo. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3:

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, entonces $\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v) = |E|$

Particularmente, un grafo dirigido es regular si para todo vértice de V se cumple: $\delta^-(v) = \delta^+(v) = \delta$

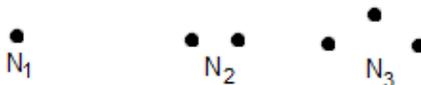
Hay muchas propiedades de un grafo dirigido que no dependen de la dirección de sus aristas. En consecuencia, a veces es conveniente ignorar esas direcciones. El grafo no dirigido que resulta de ignorar las direcciones de las aristas se llama grafo no dirigido subyacente. Un grafo dirigido y su grafo no dirigido subyacente tienen el mismo número de aristas.

3.2. CLASES ESPECIALES DE GRAFOS SIMPLES

Algunos grafos han adquirido nombres que se podría decir son estándares, porque aparecen de forma frecuente en muchas aplicaciones. Se introducirá a continuación varias clases de grafos simples.

Grafos nulos

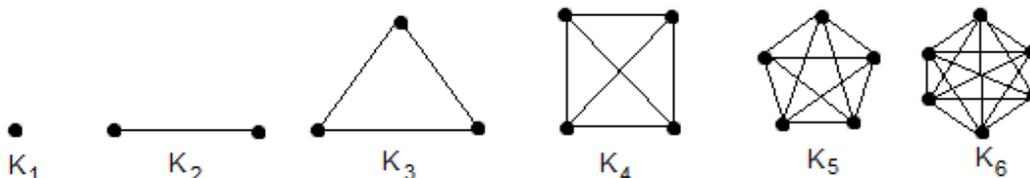
Si n es un entero positivo, el grafo nulo, denotado por N_n es el grafo que tiene por conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y ninguna arista. Se muestran a continuación los grafos nulos N_1 , N_2 y N_3 .



Grafos completos

Sea n un entero positivo, el grafo completo de n vértices, que se denota por K_n , es el grafo simple que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.

Se muestran a continuación los grafos completos K_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 .



Por la característica de los grafos completos, es fácil determinar el número de aristas que posee.

Teorema 4:

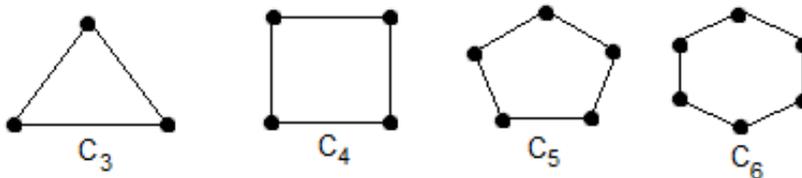
Un grafo completo de n vértices tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

Demostración:

En efecto, cada uno de los n vértices está conectado a los otros $(n - 1)$; o sea que habría $n(n - 1)$ aristas. Pero cada vértice se cuenta, de esta forma, dos veces. Por lo tanto, el número de aristas es $\frac{n(n-1)}{2}$ que es lo que se quería demostrar.

Ciclos

Si n es un entero mayor o igual que 3, el ciclo n denotado por C_n es un grafo simple que tiene por conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y por conjunto de aristas $E = \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$. Se muestran a continuación los ciclos C_n para $n = 3, 4, 5$ y 6.

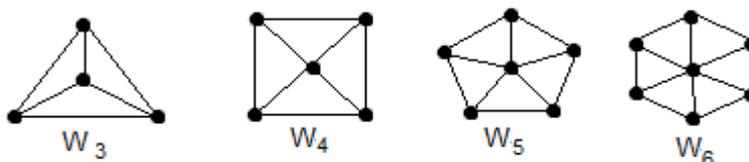


Ruedas

Se obtiene el grafo rueda, denotado por W_n ($n \geq 3$), al añadir un vértice adicional al Ciclo C_n y conectar este nuevo vértice a cada uno de los vértices del ciclo C_n mediante n nuevas aristas.

Nótese que el grafo rueda W_n tiene $(n + 1)$ vértices ya que se define este tipo de grafo a partir del grafo ciclo C_n .

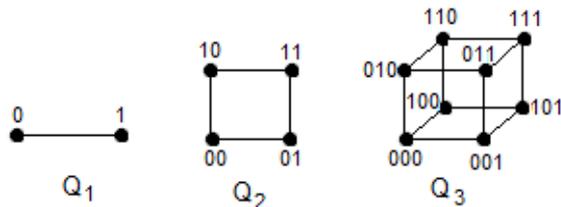
Se muestran a continuación los grafos ruedas W_n para $n = 3, 4, 5$ y 6.



n-Cubos

El cubo n -dimensional o n -cubo denotado por Q_n es el grafo cuyos vértices representan las 2^n cadenas de bits de longitud n . Dos vértices son adyacentes si y solo si, las cadenas de bits a las que representan difieren exactamente en un bit.

Se muestran a continuación los grafos Q_n para $n = 1, 2$ y 3.



Nótese que se puede construir el $(n + 1)$ – *cubo*, Q_{n+1} , a partir del n – *cubo*, Q_n haciendo dos copias de Q_n , anteponiendo un cero a cada una de las etiquetas de los vértices de una de las copias de Q_n , anteponiendo un 1 en la otra copia y añadiendo aristas que conecten dos vértices cuyas etiquetas se diferencien en el primer bit. Es decir que Q_3 se construye a partir de Q_2 y este a partir de Q_1 .

3.3. GRAFOS BIPARTITOS

Diversos problemas de Análisis Combinatorio consisten en determinar la cantidad de elementos de un subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos, que cumplan una cierta relación. Dar una relación R entre dos conjuntos A y B es equivalente a dar un grafo bipartito⁴. Así, dados $x \in A$, $y \in B$ se dice que x está relacionada con y , $x R y$, si y solo si $\{x, y\}$ es una arista del grafo. Es evidente que el grafo así definido es bipartito ya que no hay relaciones entre los elementos de un mismo conjunto.

En otras palabras, hay ocasiones en las que un grafo tiene la propiedad de que su conjunto de vértices se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos tales que cada arista conecta un vértice de uno de esos subconjuntos con un vértice del otro subconjunto.

Definición:

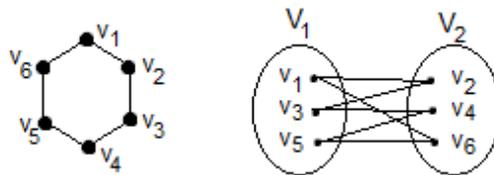
Se dice que un grafo simple G es bipartito si su conjunto de vértices V se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 tales que cada arista

⁴ Este está constituido por dos partes o que se establece entre dos partes.

del grafo conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2 (de manera que no haya ninguna arista que conecte entre sí dos vértices de V_1 ni tampoco dos vértices de V_2).

Ejemplo:

El grafo C_6 es bipartito ya que su conjunto de vértice puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ y cada arista de C_6 conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2 .

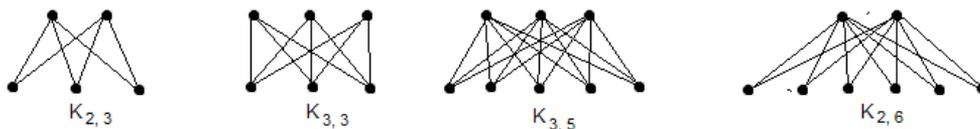


El grafo K_3 no es bipartito. Nótese que si se parte el conjunto de vértices de K_3 en dos subconjuntos disjuntos, uno de los dos subconjuntos debe contener dos vértices. Si el grafo fuese bipartito, esos dos vértices no podrían estar conectados por ninguna arista, pero en K_3 cada vértice está conectado con cualquier otro vértice por medio de una arista.

¿Cómo determinar rápidamente si un grafo es bipartito o no? Un grafo es bipartito si y solo si, se pueden colorear los vértices del grafo con dos colores de modo que ningún par de vértices adyacentes sean del mismo color.

El grafo bipartito completo $K_{m,n}$ es el grafo cuyo conjunto de vértices está formado por dos subconjuntos con m y n vértices, respectivamente, y hay una arista entre dos vértices si y solo si un vértice está en el primer subconjunto y el otro vértice está en el segundo subconjunto.

Se muestran a continuación los grafos bipartitos completos $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{3,5}$, y $K_{2,6}$



Aplicando principios del Análisis Combinatorio se puede establecer que, si G es un grafo bipartito, entonces $\sum_{v \in V_1} \delta(v) = \sum_{v \in V_2} \delta(v) = |E|$.

Este resultado indica que las sumas de los grados de los vértices de ambos subconjuntos son iguales y este número coincide con el número de aristas. Esto es fácilmente comprobable en los grafos bipartitos completos representados anteriormente.

3.4. SUBGRAFOS

Hay ocasiones en las que solo se necesita parte de un grafo para resolver un problema. En este caso, en un grafo dado se pueden eliminar algunos vértices y suprimir todas las aristas que son incidentes con alguno de los vértices descartados. Una vez eliminados esos vértices y aristas del grafo, sin eliminar ningún extremo de las aristas que quedan, se obtiene un grafo con menos aristas y vértices. Se dice que este grafo es un subgrafo del grafo original.

Definición:

Un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $H = (V', E')$ de tal forma que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

Nótese que al pedir que H contenga algunos de los vértices y aristas de G , no se debe llegar a situaciones sin sentido como incluir una arista, pero no alguno de sus vértices.

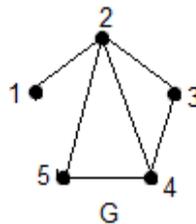
Los subgrafos especialmente relevantes son los siguientes:

Dados un par de grafos H y G , se dice que H es un subgrafo abarcador de G si H es un subgrafo de G y además $V = V'$, es decir si H contiene a todos los vértices de G .

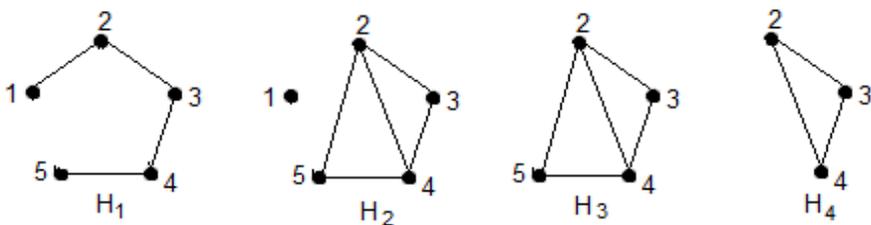
Se dice que el subgrafo $H = (V', E')$ de $G = (V, E)$ es un subgrafo inducido por sus vértices $V' \subseteq V$ si su conjunto de aristas E' contiene todas las aristas en G cuyos puntos extremos pertenecen a los vértices en H . Es decir, H tiene como conjunto de vértices a un cierto subconjunto V' de los vértices de G y como conjunto de aristas, a todas aquellas de G cuyos extremos sean vértices de V' .

Ejemplo:

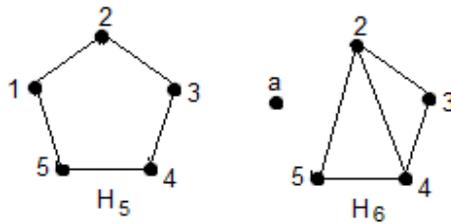
Sea el siguiente grafo G , cuyo conjunto de vértices es $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mientras que el conjunto de aristas es $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



Los siguientes cuatro grafos son subgrafos de G .



Los grafos H_1 y H_2 son, además, subgrafos abarcadores de G , porque incluyen a todos los vértices de G . El grafo H_3 es el subgrafo inducido de G para el subconjunto de vértices $\{2, 3, 4, 5\}$ y el grafo H_4 para los vértices $\{2, 3, 4\}$. Por el contrario, los dos siguientes grafos no son subgrafo de G .



El grafo H_5 , porque incluye una arista $\{1, 5\}$ que no está en G y el H_6 , porque su conjunto de vértices no es un subconjunto de los vértices de G .

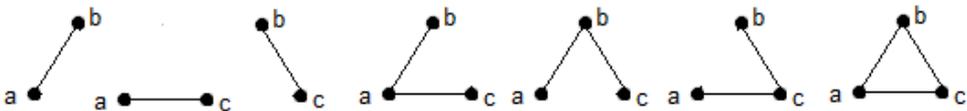
¿Cuántos grafos distintos se pueden construir que tengan como conjunto de vértices al conjunto $V = \{1, 2, \dots, n\}$?

Primero se puede calcular cuántas aristas se pueden construir con los n vértices.

Las aristas son subconjuntos de dos elementos cada una, extraídas del conjunto $V = \{1, 2, \dots, n\}$ o sea las combinaciones de n elementos tomados de a dos, es decir $\binom{n}{2}$. Por lo tanto, el conjunto de aristas es $\{1, 2, \dots, \binom{n}{2}\}$

Ahora, el número de grafos distintos con vértices $\{1, 2, \dots, n\}$, son los subconjuntos que se pueden formar con $\{1, 2, \dots, \binom{n}{2}\}$ o sea $2^{\binom{n}{2}}$

Si $n = 3$ (vértices), el número de aristas será $\binom{3}{2} = 3$. Si los vértices son $\{a, b, c\}$, las aristas serán $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ y se podrán construir $2^3 = 8$ grafos distintos.



El octavo grafo sería el grafo vacío, o sea $G = (V, E)$ con $V = \emptyset$ y $E = \emptyset$

Si $n = 4$ habría $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ grafos distintos, y si $n = 7$ habría $2^{\binom{7}{2}} = 2^{21} = 2.097.152$ grafos.

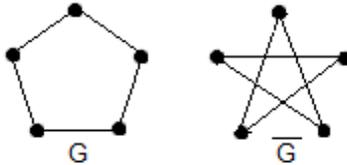
La idea de subgrafo permite, de una forma sencilla, desarrollar el concepto de grafo complementario.

Definición:

Sea G un grafo simple. El grafo complementario de G , que se denota \overline{G} , es el subgrafo de K_n formado por los n vértices de G y todas las aristas del grafo completo K_n que no están en G .

De esta manera, si dos vértices están conectados en G , no lo están en \overline{G} y viceversa.

Ejemplo:



¿Cuál es el grafo complementario de K_n ?

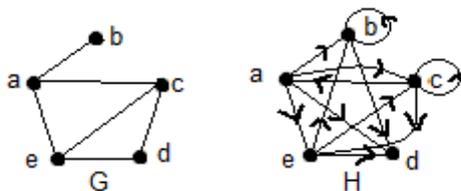
Es el grafo con n vértices y ninguna arista.

4. REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

Una forma de representar grafos, sin aristas múltiples, es enumerar todas sus aristas. Otra forma es utilizar listas de adyacencia, que especifican los vértices que son adyacentes a cada uno de los vértices del grafo.

Ejemplo:

Sean el grafo simple G y el grafo dirigido H .



Las listas de adyacencia para estos grafos son las siguientes:

Grafo G	
Vértices	Vértices adyacentes
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Grafo H	
Vértice inicial	Vértice final
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

Ejecutar algoritmos para grafos cuya representación se realiza por medio de listas de aristas o listas de adyacencias, puede resultar complicado si el grafo tiene muchas aristas. Para simplificar los cálculos, conviene representar los grafos por medio de matrices. Se utilizan, por lo general, dos tipos de matrices. Una se basa en la adyacencia de vértices y la otra en la incidencia entre vértices y aristas.

4.1. MATRICES DE ADYACENCIA

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$. Supóngase que los vértices de G se enumeran arbitrariamente como v_1, v_2, \dots, v_n . La matriz de adyacencia A_G de G , con respecto a ese listado de los vértices, es la matriz booleana $n \times n$ que tiene un 1 en la posición (i, j) si v_i, v_j son adyacentes, si los vértices no son adyacentes tiene un 0. En otras palabras:

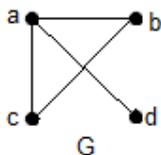
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $\#V = n$, entonces la matriz de adyacencia es

$$A_G^{n \times n} = [a_{ij}] \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que la matriz de adyacencia de un grafo depende del orden elegido para los vértices. Los n vértices pueden ordenarse (permutaciones) de $n!$ formas distintas, por lo tanto, para un mismo grafo de n vértices hay $n!$ matrices distintas que lo representan.

Ejemplo:

Escribir la matriz de adyacencia que representa el siguiente grafo G.

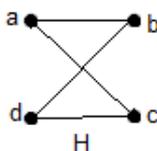


$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando una ordenación arbitraria de los vértices, por ejemplo: a, b, c y d la matriz que representa al grafo G es A_G .

Dibujar un grafo H que tenga por matriz de adyacencia a A_H

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



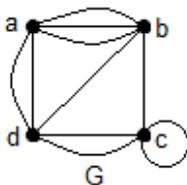
Respecto a la ordenación: a, b, c, d de los vértices, el grafo es H.

Nótese que tanto G como H son grafos simples, por lo tanto, puede calcularse el grado de un vértice sumando los unos de la fila o columna que corresponden a ese vértice.

Las matrices de adyacencia pueden usarse también para representar grafos no dirigidos con bucles y con aristas múltiples. Un bucle en el vértice a_i se representa por medio de un 1 en la posición (i, i) de la matriz de adyacencia. Cuando existen aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana debido a que el elemento en la posición (i, j) de esta matriz es igual al número de aristas asociada con $\{a_i, a_j\}$. Todos los grafos no dirigidos tienen matrices de adyacencia simétricas.

Ejemplo:

Escribir la matriz de adyacencia que representa el siguiente pseudografo G.



$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

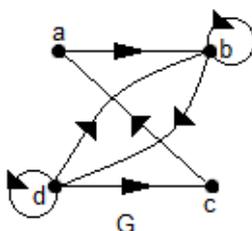
Tomando una ordenación arbitraria de los vértices, por ejemplo: a, b, c y d la matriz que representa al grafo G es A_G .

La matriz de un grafo dirigido $G = (V, E)$ tiene un 1 en la posición (i, j) si hay una arista de v_i a v_j , siendo v_1, v_2, \dots, v_n un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido. En otras palabras, la matriz de adyacencia del grafo dirigido con respecto a esta ordenación de los vértices, será:

$$A_G = [a_{ij}] / a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G. \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo:

Escribir la matriz de adyacencia que representa el siguiente grafo G, dirigido.



$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

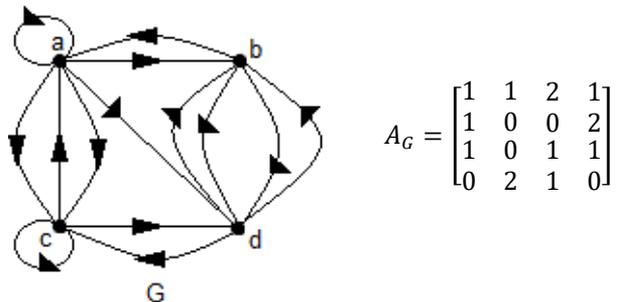
La matriz de adyacencia de un grafo dirigido no tiene por qué ser simétrica, ya que si hay una arista de a_i a a_j puede no haber una arista de a_j a a_i .

Las matrices de adyacencia se pueden emplear también para representar multigrafos dirigidos. Nuevamente, estas matrices ya no son booleanas si hay aristas múltiples en el mismo sentido conectando dos vértices. En la matriz de

adyacencia de un multigrafo dirigido, a_{ij} es igual al número de aristas asociadas con (v_i, v_j) .

Ejemplo:

Escribir la matriz de adyacencia que representa el siguiente multigrafo G, dirigido.



4.2. MATRICES DE INCIDENCIA

Otra representación de grafos usada frecuentemente es la que emplea matrices de incidencia.

Sea $G = (V, E)$, un grafo no dirigido. Supóngase que v_1, v_2, \dots, v_n son los vértices y que e_1, e_2, \dots, e_m son las aristas de G. Entonces, la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y de E es la matriz M de orden $n \times m$ dada por:

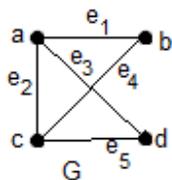
$$M_G^{n \times m} = [m_{ij}] / m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e_j \text{ es incidente con } v_i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que la matriz tiene tantas filas como elementos tiene V y tantas columnas como elementos tiene el conjunto E.

En las matrices de incidencia se debe tener en cuenta que los dos conjuntos, V y E deben tener un determinado orden.

Ejemplo:

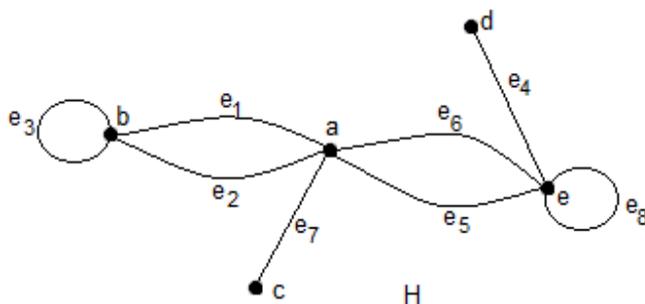
Escribir la matriz de incidencia que representa el siguiente grafo G.



$$M_G = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tomando una ordenación arbitraria de los vértices, por ejemplo: a, b, c, d y de las aristas: e₁, e₂, e₃, e₄, e₅, la matriz que representa al grafo G es M_G .

Escribir la matriz de incidencia que representa el siguiente pseudografo H.



Tomando una ordenación arbitraria de los vértices, por ejemplo: a, b, c, d, e y de las aristas: e₁, e₂, e₃, e₄, e₅, e₆, e₇, e₈ la matriz que representa al pseudografo H es M_H .

$$M_H = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Las matrices de incidencia permiten representar aristas múltiples y bucles. Nótese que las aristas múltiples se representan en la matriz de incidencia mediante columnas con todos sus elementos iguales, puesto que dichas aristas son incidentes en el mismo par de vértices. Los bucles se representan por

medio de una columna con un único elemento igual a 1, que corresponde al vértice con el que es incidente el bucle.

Compruébese que, en las matrices de incidencia, al sumar los elementos de cada una de las filas, se obtiene el grado de los vértices y, al sumar las columnas, es posible distinguir cuándo se trata de un lazo, ya que la suma es 1. Cuando no se trata de lazos, la suma es 2.

4.3. ISOMORFISMO DE GRAFOS

Evidentemente, lo importante de un grafo no son los nombres de los vértices ni su representación gráfica o cualquier otra representación. La propiedad característica de un grafo es la manera en que los vértices están unidos por las aristas, se podría llamar a esto la estructura de un grafo.

Se dispone de una terminología muy útil para los grafos que tienen la misma estructura.

Definición:

Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos⁵ si hay una función biyectiva f de V_1 en V_2 con la propiedad de que, para cada par de vértices u y $v \in V_1$, u y v son adyacentes en G_1 si y sólo si $f(u)$ y $f(v)$ son adyacentes en G_2 . Se dice que esta función f es un isomorfismo.

O sea que:

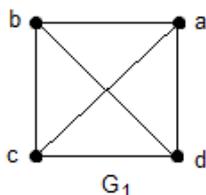
$$G_1 \simeq G_2 \Leftrightarrow \exists f: V_1 \rightarrow V_2 / \begin{cases} f \text{ es biyectiva} \\ \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2 \end{cases}$$

En otras palabras, cuando dos grafos son isomorfos, hay una función biyectiva entre los vértices de los dos grafos que preserva la adyacencia. El isomorfismo de grafos simples es una relación de equivalencia.

⁵ La palabra isomorfismo tiene raíces griegas: isos (iguales), morfos (forma), isomorfismo: igual forma.

Ejemplo:

Construir un grafo isomorfo, al grafo G_1



Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ el grafo dado y $G_2 = (V_2, E_2)$ el grafo buscado. Por lo tanto $V_1 = \{a, b, c, d\}$ y $E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$ son el conjunto de vértices y aristas, respectivamente, de G_1

Se debe construir una función f entre los conjuntos de vértices, que sea biyectiva. Por lo tanto, V_2 debe tener el mismo número de vértices que V_1 es decir cuatro. Se puede escribir: $V_2 = \{a', b', c', d'\}$.

Por otra parte, f debe conservar la adyacencia, es decir que se debe cumplir

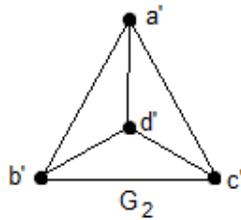
$$\begin{cases} f(\{a, b\}) \in E_2 \\ f(\{a, c\}) \in E_2 \\ f(\{a, d\}) \in E_2 \\ f(\{b, c\}) \in E_2 \\ f(\{b, d\}) \in E_2 \\ f(\{c, d\}) \in E_2 \end{cases}$$

Cuestión que se consigue sin más que definir:

$$f: V_1 \rightarrow V_2: \begin{cases} f(a) = a' \\ f(b) = b' \\ f(c) = c' \\ f(d) = d' \end{cases}$$

Es decir que en G_2 , es $E_2 = \{\{a', b'\}, \{a', c'\}, \{a', d'\}, \{b', c'\}, \{b', d'\}, \{c', d'\}\}$ el conjunto de aristas.

Una representación gráfica de G_2 puede ser la siguiente



Por lo general, es difícil determinar si dos grafos simples son o no isomorfos, ya que hay $n!$ posibles biyecciones entre los conjuntos de vértices de dos grafos simples de n vértices. Intentar comprobar si cada una de estas funciones preserva o no la adyacencia, es un método poco práctico cuando n es grande.

A pesar de esto, con frecuencia se puede comprobar que dos grafos simples no son isomorfos demostrando que no comparten alguna propiedad que dos grafos isomorfos deberían tener en común. A tales propiedades se las llama “invariantes bajo isomorfismo de grafos simples”.

Definición:

Un invariante de un grafo G es un número asociado con G que tiene el mismo valor para cualquier grafo que sea isomorfo con él.

Ejemplo:

Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de vértices ya que hay una función biyectiva entre los conjuntos de vértices de los grafos.

Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de aristas, porque la función biyectiva entre los conjuntos de vértices establece una biyección entre las aristas.

Los grados de los vértices en grafos simples isomorfos deben ser los mismos. Es decir, un vértice v de grado d en G_1 se corresponde con un vértice $f(v)$ de grado d en G_2 , ya que un vértice w en G_1 es adyacente a v si y solo si $f(v)$ y $f(w)$ son adyacentes en G_2 .

Dado un grafo simple G , el grado de cualquiera de sus vértices es un invariante de G .

Demostración:

Sean G_1 , G_2 dos grafos simples y f un isomorfismo entre ambos. Si u es un vértice arbitrario de G_1 entonces $\delta(u) = \delta(f(u))$.

En efecto, como f es una biyección que conserva la adyacencia, el número de vértices adyacentes a u en G_1 debe ser el mismo que el número de vértices adyacentes a $f(u)$ en G_2 , por lo tanto, el número de aristas con extremo en u debe coincidir con el número de aristas con extremo en $f(u)$ y, consecuentemente, sus grados serán iguales.

Las siguientes propiedades de los grafos también son invariantes bajo isomorfismo de grafos simples:

Si dos grafos son isomorfos, también lo son los correspondientes subgrafos.

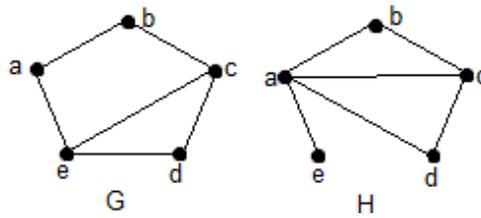
Por ejemplo, si el grafo G_1 contiene un subgrafo completo K_n y G_2 es isomorfo a G_1 , entonces G_2 contiene un subgrafo K_n .

Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si y solo si, sus grafos complementarios son isomorfos.

Si cualquiera de las cantidades o propiedades anteriores difieren en dos grafos simples, estos no pueden ser isomorfos. Sin embargo, nótese que si estas cantidades o propiedades coinciden para dos grafos, esto no necesariamente significa que los grafos sean isomorfos. En realidad, no se conoce ningún conjunto de invariantes que pueda usarse para determinar si dos grafos simples son o no isomorfos.

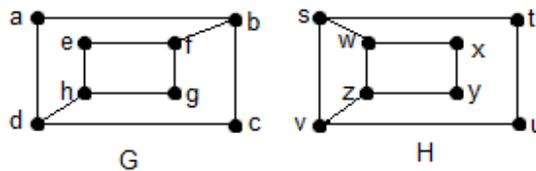
Ejemplo:

Se muestra a continuación los grafos G y H . ¿Son isomorfos?



Tanto G como H tienen cinco vértices y seis aristas. Sin embargo, G no tiene ningún vértice de grado uno, mientras que H sí lo tiene, por lo tanto, no son grafos isomorfos.

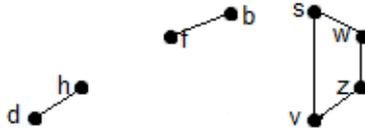
Se muestran a continuación los grafos G y H. ¿Son isomorfos?



Ambos grafos, G y H, tienen ocho vértices y diez aristas. Ambos tienen cuatro vértices de grado dos (a, c, e, g en G y t, u, x, y en H) y cuatro de grado tres (b, d, f, h en G y s, v, w, z en H). Como todos estos invariantes coinciden, se puede conjeturar que estos grafos son isomorfos.

Sin embargo, G y H no son isomorfos. Nótese que como $\delta(a) = 2$ en G, el vértice a debería corresponder a uno de los vértices: t, u, x o y de H, ya que estos son los vértices de grado dos. Pero cada uno de estos cuatro vértices es adyacente a un vértice de grado dos y otro de grado tres, en H. Esto no es cierto para el vértice a en G, ya que es adyacente a dos vértices de grado tres.

Otra forma de ver que G y H no son isomorfos es observar que los subgrafos de G y de H, formados por sus vértices de grado tres y por las aristas que los conectan, deberían ser isomorfos. Sin embargo, estos subgrafos no son isomorfos, como se puede observar a continuación.



Para demostrar que una función f del conjunto de vértices del grafo G_1 en el conjunto de vértices del grafo G_2 es un isomorfismo, se debe demostrar que f preserva las adyacencias. Una manera apropiada de hacerlo es usando matrices de adyacencia.

Teorema 5:

Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si y solo si, para algún orden de sus vértices, sus matrices de adyacencia son iguales.

Demostración:

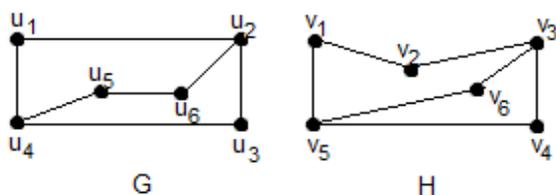
Supóngase que G_1 y G_2 son isomorfos. Entonces existe una función f biyectiva de V_1 en V_2 con la propiedad de que, para cada par de vértices u y $v \in V_1$, u y v son adyacentes G_1 si y solo si $f(u)$ y $f(v)$ son adyacentes en G_2 .

Sea v_1, v_2, \dots, v_n un orden de los vértices de G_1 . Sea A_{G_1} la matriz de adyacencia de G_1 , relativa a ese orden de los vértices. Sea A_{G_2} la matriz de adyacencia de G_2 relativa al orden $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$. Supóngase que el elemento de la fila i y la columna j ($i \neq j$) de M_{G_1} es igual a k . Entonces, existen k aristas, e_1, e_2, \dots, e_k incidentes en v_i y v_j . Por lo tanto, hay exactamente k aristas $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_k)$ incidentes en $f(v_i)$ y $f(v_j)$ en G_2 . Entonces, el elemento en la fila i columna j en M_{G_2} que cuenta el número de aristas que inciden en $f(v_i)$ y $f(v_j)$, también es igual a k . Con un argumento similar se puede demostrar que los elementos de las diagonales de A_{G_1} y A_{G_2} son iguales. Por lo tanto, se concluye que $M_{G_1} = M_{G_2}$

La argumentación del recíproco: *Si las matrices de adyacencia de dos grafos G_1 y G_2 para algún ordenamiento de sus vértices son iguales, entonces los grafos son isomorfos* es similar.

Ejemplo:

Determinar si los grafos G y H que se muestran a continuación son o no isomorfos.



Tanto G como H tienen seis vértices y siete aristas. Ambos tienen cuatro vértices de grado dos y dos vértices de grado tres. También es fácil ver que los subgrafos de G y H formados por los vértices de grado dos y las aristas que los conectan son isomorfos. Como G y H tienen estos invariantes en común, es razonable tratar de encontrar un isomorfismo f .

Se puede determinar una función f y luego determinar si es o no un isomorfismo.

Como $\delta(u_1) = 2$ y u_1 no es adyacente a ningún otro vértice de grado dos, la imagen de u_1 tiene que ser o bien v_4 o v_6 que son los únicos vértices de grado dos en H que no son adyacentes a ningún otro vértice de grado dos. Se asigna arbitrariamente $f(u_1) = v_6$. Si se observara que esto no conduce a un isomorfismo, se puede intentar luego con $f(u_1) = v_4$. Como u_2 es adyacente a u_1 , las posibles imágenes de u_2 son v_3 o v_5 . Se asigna arbitrariamente $f(u_2) = v_3$. Si se sigue de esta manera tomando como guía la adyacencia de vértices y los grados, se puede asignar $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, $f(u_6) = v_2$. Quedando de esta manera definida la función biyectiva entre el conjunto de vértices de G y el conjunto de vértices de H.

$$f(u_1) = v_6, f(u_2) = v_3, f(u_3) = v_4, f(u_4) = v_5, f(u_5) = v_1, f(u_6) = v_2$$

Para ver si f preserva o no la adyacencia, se examina la matriz de adyacencia de G ,

$$A_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

y la matriz de adyacencia de H con sus filas y sus columnas etiquetadas con las imágenes de los vértices correspondientes de G .

$$A_H = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Como $A_G = A_H$ se sigue que f preserva las adyacencias. Se concluye que f es un isomorfismo, de modo que G y H son isomorfos. Nótese que si f no hubiese resultado un isomorfismo, no se podría haber establecido que G y H no son isomorfos, ya que podría haber alguna otra correspondencia entre los vértices de G y de H que sí fuese un isomorfismo.

Los mejores algoritmos para determinar si dos grafos son o no isomorfos tienen complejidad exponencial (en el número de vértices de los grafos) en el peor caso. No obstante, se conocen algoritmos de complejidad polinómica en el caso promedio que resuelven el problema.

5. CONEXIÓN DE GRAFOS

Diversos problemas se pueden representar por medio de caminos que se forman al ir recorriendo las aristas de un grafo. Por ejemplo, los problemas para planificar de forma eficiente las rutas de distribución de correo, de recolección de basura, los diagnósticos en redes de computadoras; también para determinar si se puede enviar o no un mensaje entre dos computadoras usando enlaces intermedios, entre otros tantos, se pueden resolver utilizando modelos que involucran caminos definidos sobre grafos.

Definición:

Sea G un grafo no dirigido. Un camino de longitud n ($n \in \mathbb{Z}^+$) del vértice u al vértice v en G es una secuencia de n aristas a_1, a_2, \dots, a_n de G tal que $f(a_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(a_2) = \{x_1, x_2\}$. . . $f(a_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$ de tal forma que $x_0 = u$ y $x_n = v$. Si el grafo es simple, se denota el camino por la secuencia de vértices $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Es decir que un camino es una secuencia de aristas que comienza en un vértice del grafo y recorre ciertas aristas de él, siempre conectando pares de vértices adyacentes.

Otros términos relacionados con caminos son los circuitos y la denominación de estos al recorrer, o no, dos veces la misma arista.

Definición:

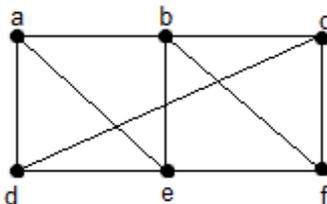
Sea G un grafo no dirigido, un circuito en G es un camino que comienza y termina en el mismo vértice y tiene longitud mayor que cero. Se dice que un camino o un circuito pasa por los vértices $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. o también que recorre las aristas a_1, a_2, \dots, a_n . Un camino o un circuito es simple si no contiene la misma arista más de una vez.

Nótese que cuando no es necesario distinguir entre aristas múltiples se puede identificar un camino mediante los vértices por los que pasa. Puede haber más

de un camino que pase por esa secuencia de vértices. Nótese también que un camino de longitud cero consiste en un único vértice.

Ejemplo:

Sea el grafo simple que se muestra a continuación.



Obsérvese que en este grafo se cumple:

Secuencia	Camino	Circuito	Aristas	Longitud	Simple
a, d, c, f, e	Sí	No	{a, d}, {d, c}, {c, f}, {f, e}	4	Sí
d, e, c, a	No	-.-	-.-	-.-	-.-
b, c, f, e, b	Sí	Sí	{b, c}, {c, f}, {f, e}, {e, b}	4	Sí
a, b, e, d, a, b	Sí	No	{a, b}, {b, e}, {e, d}, {d, a}, {a, b}	5	No

Para multigrafos dirigidos, las definiciones anteriores son similares.

Definición:

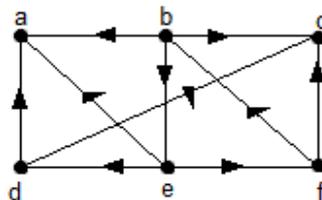
Sea G un multigrafo dirigido. Un camino de longitud n ($n \in \mathbb{Z}^+$) del vértice u al vértice v en G es una secuencia de n aristas a_1, a_2, \dots, a_n de G tal que $f(a_1) = \{x_0, x_1\}, f(a_2) = \{x_1, x_2\} \dots f(a_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$ de tal forma que $x_0 = u$ y $x_n = v$. Si no hay aristas múltiples en el grafo dirigido, se denota el camino por la secuencia de vértices $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Un camino de longitud mayor que cero que comienza y termina en el mismo vértice ($u = v$) es un circuito. Se dice que un camino o un circuito es simple si no contiene la misma arista más de una vez.

Nótese que cuando no es necesario distinguir entre aristas múltiples se puede identificar un camino mediante los vértices por los que pasa. Puede haber más de un camino que pase por esa secuencia de vértices.

De manera similar que en los grafos no dirigidos, un camino de longitud cero consiste en un único vértice.

Ejemplo:

Sea el grafo dirigido que se muestra a continuación.



Obsérvese que en este grafo dirigido se cumple:

Secuencia	Camino	Circuito	Aristas	Longitud	Simple
b, e, f, c	Sí	No	{b, e}, {e, f}, {f, c}	3	Sí
d, a, b, e	No	-.-	-.-	-.-	-.-
b, e, f, b	Sí	Sí	{b, e}, {e, f}, {f, b}	3	Sí
b, e, f, b, e, d	Sí	No	{b, e}, {e, f}, {f, b}, {b, e}, {e, d}	5	No

5.1. GRAFOS CONEXOS

¿Cuándo una red de área local tiene la propiedad de que cualquier par de computadoras de la misma puedan compartir información? Si la red está modelada mediante un grafo, la pregunta sería en términos de la teoría de grafos. ¿Hay siempre un camino entre cualquier par de vértices del grafo?

Una de las propiedades más elementales de las que puede gozar cualquier grafo es que sea conexo.

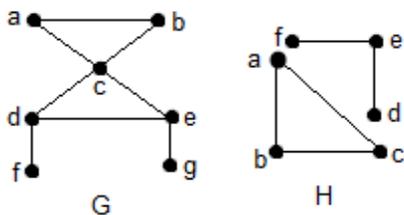
Definición:

Se dice que un grafo no dirigido es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo. Es decir que:

$G = (V, E)$ es conexo $\Leftrightarrow \forall u, v \in V: \exists \pi = \langle u, v \rangle$ En donde π es un camino que une el vértice u con el v .

Ejemplo:

Sean los grafos G y H cuyas representaciones se muestran a continuación.



G es un grafo conexo, mientras que H no lo es, ya que por ejemplo no existe un camino entre los vértices a y d.

Para saber exactamente si un grafo es conexo o no, se puede utilizar una condición simple, expresada en términos del número de aristas.

Teorema 6:

Sea n el número de vértices de un grafo. Si el número de aristas es mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, entonces el grafo es conexo.

Demostración:

Supóngase que hay al menos dos componentes conexas⁶ en el grafo. Sea k el número de vértices en una de las componentes y, por lo tanto, $n - k$ vértices

⁶ Un grafo que no es conexo es la unión de dos o más subgrafos conexos que dos a dos no tienen ningún vértice en común. A estos subgrafos conexos disjuntos se les llama componentes conexas del grafo. En el siguiente apartado se define, más rigurosamente, componentes conexas de un grafo.

en la otra. El máximo número de aristas cuando hay dos componentes conexas es cuando ambas componentes son grafos completos. Por lo tanto, el número de aristas en el grafo entero es $\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ que no es mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Esto es una contradicción, por lo tanto, el grafo es conexo.

Obsérvese que si en el grafo hay menos de $n - 2$ aristas, el grafo no es conexo. Luego, cualquier grafo con n vértices debe tener al menos $n - 1$ aristas para ser conexo.

Para el caso de los grafos no conexos se puede hacer uso de una relación denominada “estar conectado con” que se establece en el conjunto de los vértices.

Teorema 7:

Dado un grafo no dirigido, la relación “estar conectado con” definida en el conjunto de sus vértices es una relación de equivalencia.

Demostración

Sea el grafo $G = (V, E)$, se define en el conjunto V de sus vértices la relación:

$$u R v \Leftrightarrow u \text{ está conectado con } v.$$

Esta relación es de equivalencia.

Sea u un vértice cualquiera de V . Entonces el camino $\pi = \langle u, u \rangle$ conecta a u consigo mismo. Luego $\forall u \in V: u R u$. Esto equivale a decir que la relación es reflexiva.

Sean u y v dos vértices cualesquiera de V . Entonces:

$$u R v \Leftrightarrow \exists \pi = \langle u, v \rangle \Rightarrow \pi' = \langle v, u \rangle \Leftrightarrow v R u$$

Luego, $\forall u, v \in V: u R v \Rightarrow v R u$ o sea que la relación es simétrica.

Sean u, v, w tres vértices cualesquiera de V , entonces

$$\left. \begin{array}{l} u R v \Leftrightarrow \exists \pi_1 = \langle u, v \rangle \\ v R w \Leftrightarrow \exists \pi_2 = \langle v, w \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \pi = \langle u, w \rangle \Leftrightarrow u R w \text{ Basta con unir los caminos}$$

π_1 y π_2 .

Por lo tanto, se puede afirmar que $\forall u, v, w \in V: u R v \wedge v R w \Rightarrow u R w$, es decir que R es transitiva.

Por todo lo anterior, la relación “estar conectado con” es de equivalencia.

5.2. COMPONENTES CONEXAS DE UN GRAFO

Debido a que la relación “estar conectado con” definida en el conjunto de vértices de un grafo G, es una relación de equivalencia, divide al conjunto en clases de equivalencias que reciben el nombre de componentes conexas. Así lo establece la siguiente definición.

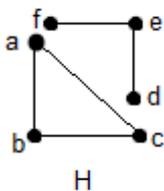
Definición:

Dado un grafo $G = (V, E)$, las clases de equivalencia definidas en el conjunto de vértices, V , por la relación de equivalencia “estar conectado con” reciben el nombre de componentes conexas del grafo G.

Obsérvese que de esta manera un grafo G no conexo puede ser “partido”, por la relación “estar conectado con”, en subgrafos conexos que son las citadas componentes conexas de G.

Ejemplo:

Sea el siguiente grafo H.



Su conjunto de vértices es: $\{a, b, c, d, e, f\}$. Si consideramos en este grafo la relación de equivalencia definida anteriormente, las clases de equivalencia serán:

$[a] = \{a, b, c\} = [b] = [c]$ y $[d] = \{d, e, f\} = [e] = [f]$. Por lo tanto, el grafo H tiene dos componentes conexas que son los dos subgrafos H_1 y H_2 cuyos conjuntos de vértices son $[a]$ y $[d]$. Es decir que en:

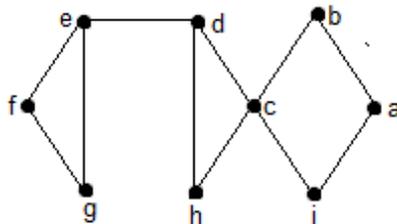
H_1 es $V_1 = \{a, b, c\}$ y $E_1 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$ y en

H_2 es $V_2 = \{d, e, f\}$ y $E_2 = \{\{f, e\}, \{e, d\}\}$

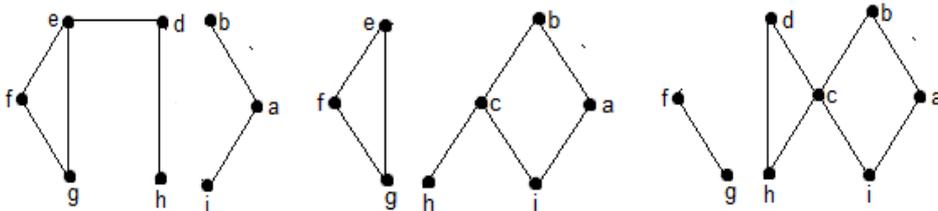
En muchas ocasiones, eliminar un vértice y todas las aristas incidentes en él produce un subgrafo con más componentes conexas que las que tenía el grafo original. A estos vértices se los llama “vértices de corte”. Eliminar un punto de corte de un grafo conexo produce un subgrafo que no es conexo. Análogamente, una arista que produce un grafo con más componentes conexas que el grafo original se llama “arista de corte o puente”.

Ejemplo:

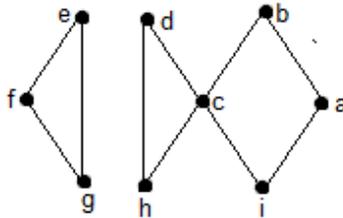
Hallar los vértices de corte y los puentes del grafo dado a continuación.



Los vértices de corte son c, d y e , ya que al eliminarlos, junto con las aristas que inciden en ellos, se producen subgrafos con más componentes conexas que el original. Tal como se puede observar a continuación.



Respecto de los puentes, el único que existe en el grafo propuesto es la arista que une los vértices d y e ya que en el grafo resultante existen vértices que no están conectados, es decir, no es conexo.



5.3. CONEXIÓN EN GRAFOS DIRIGIDOS

Hay dos nociones de conexión en grafos dirigidos, dependiendo de si se considera o no la dirección de las aristas.

Definición:

Se dice que un grafo dirigido es fuertemente conexo si hay un camino de u a v y un camino de v a u para cualquier par de vértices u y v del dígrafo.

Es decir, para que un grafo dirigido sea fuertemente conexo debe haber una secuencia de aristas dirigidas desde cualquier vértice del grafo a cualquier otro vértice. Un grafo dirigido puede no ser fuertemente conexo, pero puede existir al menos un camino entre cualquier par de vértices.

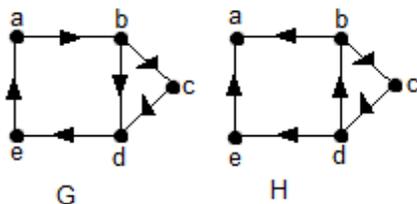
Definición:

Se dice que un grafo dirigido es débilmente conexo si hay un camino entre cada par de vértices del grafo no dirigido subyacente.

Esto es, al ignorar las direcciones de las aristas, hay siempre un camino entre dos vértices cualesquiera del grafo.

Ejemplo:

¿Son fuertemente conexos los grafos dirigidos G y H? ¿Son débilmente conexos?



Compruébese que G es fuertemente conexo, ya que existe un camino entre cada par de vértices de este grafo. Consecuentemente G es también débilmente conexo. El grafo H no es fuertemente conexo, ya que por ejemplo no hay un camino dirigido del vértice a hacia el b. Sin embargo, compruébese que H es débilmente conexo porque hay un camino entre cada par de vértices en el grafo no dirigido subyacente de H. El grafo no dirigido de un dígrafo G, es aquel grafo que se obtiene al ignorar las direcciones de las aristas de G.

5.4. CAMINOS E ISOMORFISMO DE GRAFOS

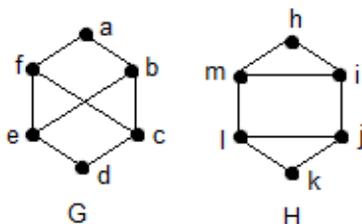
Hay, entre muchas otras, dos formas en las que los caminos y circuitos pueden ayudar a determinar si dos grafos son isomorfos o no. Primero, la existencia de un circuito simple de longitud k , siendo k un entero positivo mayor que dos, es un invariante bajo isomorfismo útil para determinar si dos grafos simples son o no isomorfos. Es decir que la existencia de un circuito simple de una longitud concreta es un invariante útil que se puede emplear a la hora de mostrar que dos grafos no son isomorfos.

En segundo lugar, se puede hacer uso de los caminos a la hora de construir posibles isomorfismos.

Se mostrará estos usos, de los caminos y circuitos, mediante dos ejemplos.

Ejemplos:

Determinar si los grafos G y H son isomorfos.

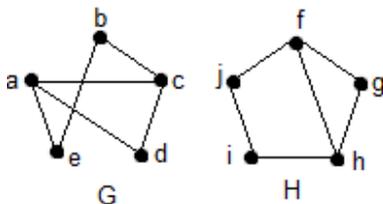


Ambos grafos tienen seis vértices y ocho aristas. Además, tienen cuatro vértices de grado tres (b, c, e, f para G y para H: i, j, l, m) y dos vértices de grado dos (a, d para G y para H: h, k). Al coincidir estos tres invariantes en ambos grafos, se podría sospechar que son isomorfos.

Sin embargo, H contiene un circuito simple de longitud tres: h, i, m, h, mientras que G no contiene ningún circuito simple de longitud tres. Compruébese esto, verificándose que todos los circuitos simples de G tienen al menos longitud cuatro.

Como la existencia de un circuito simple de longitud tres es un invariante bajo isomorfismo, G y H no son isomorfos.

Determinar si los grafos G y H son isomorfos.



Tanto G como H tienen cinco vértices y seis aristas, ambos tienen dos vértices de grado tres (a, c y f, h, respectivamente) y tres vértices de grado dos (b, d, e y g, i, j, respectivamente) y ambos tienen un circuito simple de longitud tres (a, c, d, a y f, g, h, f, respectivamente), un circuito simple de longitud cuatro (a, c, b,

e, a y f, h, i, j, f, respectivamente) y un circuito simple de longitud cinco (b, c, d, a, e, b y g, h, i, j, f, g, respectivamente). Como todos estos invariantes coinciden, G y H pueden ser isomorfos.

Para hallar un posible isomorfismo, se puede seguir caminos que pasen por todos los vértices de manera que los vértices correspondientes tengan el mismo grado en los dos grafos. Por ejemplo, los caminos a, d, c, b, e en G y f, g, h, i, j en H pasan por todos los vértices del grafo, comienzan en un vértice de grado tres, pasan por vértices de grado dos, tres y dos, respectivamente, y acaban en un vértice de grado dos.

Siguiendo estos caminos, uno en cada grafo, se puede definir la función f de la siguiente manera: $f(a) = f$, $f(d) = g$, $f(c) = h$, $f(b) = i$, $f(e) = j$. Verifíquese que al definir f de esta forma se mantienen las adyacencias. Otra manera de verificar el isomorfismo es hacer, para las ordenaciones adecuadas de los vértices, las matrices de adyacencia de G y H que deben resultar iguales.

5.5. EL NÚMERO DE CAMINOS ENTRE DOS VÉRTICES

El número de caminos que hay entre dos vértices de un grafo se puede determinar usando su matriz de adyacencia.

Teorema 8:

Sea G un grafo y sea M_A su matriz de adyacencia con respecto a la ordenación v_1, v_2, \dots, v_n (se admiten aristas dirigidas o no dirigidas, aristas múltiples y bucles). El número de caminos distintos de longitud n ($n \in \mathbb{Z}^+$) de v_i a v_j , es igual al elemento que ocupa la posición (i, j) en la matriz $(M_A)^n$.

Demostración:

Se demostrará el teorema por inducción matemática.

PB) Para $n = 1$ es $(M_A)^1$ es la matriz M_A o sea la matriz de adyacencia del grafo. Entonces por definición de la misma, si $a_{ij} = 1$ hay una arista entre los

vértices i y j , es decir que hay un camino de longitud uno entre ambos vértices. En cualquier otro caso $a_{ij} = 0$. Por lo tanto, se verifica el teorema para el primer elemento.

PI) Supóngase que el teorema es cierto para $n = k$, es decir que el elemento en la posición (i, j) de la matriz $(M_A)^k$ es el número de caminos de longitud k de v_i a v_j . Esta es la hipótesis inductiva.

Se debe demostrar que el teorema es cierto para $n = k + 1$. Obsérvese que $(M_A)^{k+1} = (M_A)^k \cdot M_A$ de tal forma que el elemento a_{ij} de $(M_A)^{k+1}$ se obtiene multiplicando los elementos de la i -ésima fila de $(M_A)^k$ por la j -ésima columna de la matriz M_A y sumándolos, es decir que: $a_{ij} = b_{i1} \cdot c_{1j} + b_{i2} \cdot c_{2j} + \dots + b_{in} \cdot c_{nj}$.

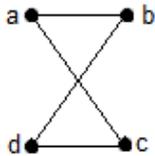
En la expresión anterior, b_{im} es un elemento de $(M_A)^k$ y por hipótesis inductiva es el número de caminos de longitud k de v_i a v_m .

Un camino de longitud $k + 1$ de v_i a v_j está formado por un camino de longitud k de v_i a algún vértice intermedio v_m y por una arista de v_m a v_j . Por la regla del producto, el número de caminos de ese tipo es el producto del número de caminos de longitud k de v_i a v_m , que es b_{im} , por el número de aristas de v_m a v_j . Al sumar todos esos productos para todos los posibles vértices intermedios v_m , se obtiene el resultado que se busca en virtud a la regla de la suma.

De esta manera, se concluye que el teorema es cierto para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo:

¿Cuántos caminos de longitud cuatro hay entre los vértices a y d del siguiente grafo simple?



Al ordenar los vértices del grafo de la forma a, b, c, d, su matriz de adyacencia es:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el número de caminos de longitud 4 entre los vértices a y d es el elemento que ocupa la posición (1, 4) de $(M_A)^4$. Como

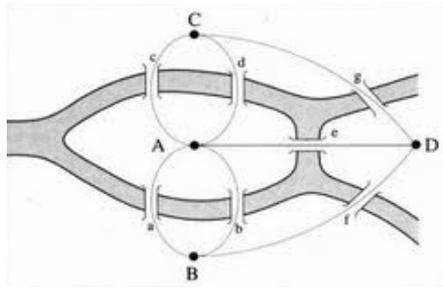
$$(M_A)^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que hay exactamente ocho caminos de longitud cuatro entre a y d. Inspeccionando el grafo, estos caminos son:

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| a, b, a, b, d | a, b, a, c, d | a, b, d, b, d | a, b, d, c, d |
| a, c, a, b, d | a, c, a, c, d | a, c, d, b, d | a, c, d, c, d |

6. CAMINOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

En el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg en Prusia Oriental (hoy Kaliningrado en Lituania) estaba dividida por el río Pregel (hoy Pregolya) en cuatro zonas como muestra la figura. Las dos orillas B y C del río, una isla A llamada Kneiphof y la parte de tierra D entre los ríos Pregel y Nuevo Pregel. Existían siete puentes, dos entre A y B, dos entre A y C, uno entre A y D, uno entre B y D y uno entre C y D.



Durante los paseos dominicales, los habitantes de la ciudad intentaban encontrar un camino en el cual cada uno de los puentes se cruzase exactamente una vez y se volviese al punto de partida.

Aunque era ampliamente conocido que tal camino no existía, ninguno de los habitantes interesados podría explicar el porqué.

En 1736, el matemático suizo Leonhard Euler publicó el artículo “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” (La solución de un problema relativo a la geometría de posición), en el cual resolvió lo que se conocía con el nombre de “*Problema de los puentes de Königsberg*”. Este trabajo se considera el primer artículo sobre lo que hoy se conoce como la Teoría de Grafos.

6.1. CAMINOS Y CIRCUITOS EULERIANOS

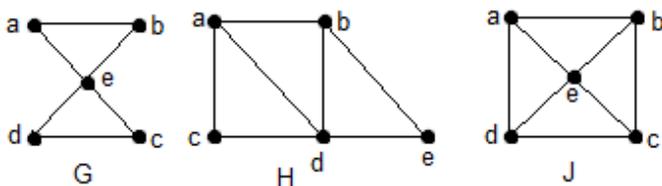
Antes de poder plantear la resolución del “*Problema de los puentes de Königsberg*” en términos de la teoría de grafos, se verá las definiciones de camino y circuitos eulerianos como también las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de los mismos.

Definición:

Un circuito euleriano de un grafo G es un circuito simple que contiene a todas las aristas de G . Un camino euleriano es un camino simple que contiene a todas las aristas de G .

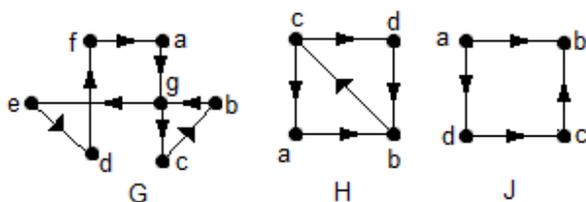
Ejemplo:

Sean los grafos simples G, H y J cuyas representaciones son las siguientes.



Un ejemplo de circuito euleriano, en el grafo G, es: a, b, e, c, d, e, a. Compruébese que ni H ni J tienen un circuito euleriano. El grafo H contiene un camino euleriano: a, c, d, e, b, d, a, b. Compruébese que el grafo J no contiene ningún camino euleriano.

Sean los grafos dirigidos G, H y J cuyas representaciones son las siguientes.



Un ejemplo de circuito euleriano, en el grafo G, es: a, g, c, b, g, e, d, f, a. Compruébese que ni H ni J tienen un circuito euleriano. El grafo H contiene un camino euleriano: c, a, b, c, d, b. Compruébese que el grafo J no contiene ningún camino euleriano.

¿Cuál sería la condición necesaria para la existencia de un circuito euleriano en un multigrafo conexo?

Si un multigrafo conexo contiene un circuito euleriano lo que se puede demostrar es que todos los vértices tienen grado par.

Demostración:

Supóngase que G es un multigrafo conexo que contiene un circuito euleriano.

Sea v un vértice cualquiera de G. Puede ocurrir que si v :

i) no es el primer vértice del circuito, cada una de las veces que el circuito pase por v entrará y saldrá por dos aristas distintas de la vez anterior, luego, esto contribuirá con dos al grado de v ;

ii) es el primer vértice del circuito, el circuito contribuye con dos al grado de v por cada una de las veces que pasa por v , salvo en primera y en la última en las que añade uno cada vez.

Por lo tanto, en cualquier caso, el grado de v es par.

Esta condición necesaria para la existencia de un circuito euleriano, ¿es también suficiente? Es decir, ¿tiene que existir un circuito euleriano en un multigrafo conexo con todos los vértices de grado par? Esta pregunta se puede responder afirmativamente y ser demostrada por medio de un argumento constructivo.

Demostración:

Supóngase que G es un multigrafo conexo y que el grado de cada uno de sus vértices es par, se forma un circuito simple que comienza en un vértice arbitrario a . Sea $x_0 = a$, se elige arbitrariamente una arista $\{x_0, x_1\}$ incidente con a . Se continúa construyendo un camino simple $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}$ tan largo como sea posible.

El circuito se acaba puesto que el multigrafo tiene un número finito de aristas. Comienza en a con una arista de la forma $\{a, x\}$ y termina en a con una arista de la forma $\{y, a\}$. Esto es así porque cada vez que el circuito atraviesa un vértice con grado par, usa una sola arista cuando entra, de manera que queda al menos otra arista para que el circuito abandone ese vértice. Puede que este circuito haga uso de todas las aristas o puede que no.

Si se han usado todas las aristas, se ha construido un circuito euleriano. De no ser así, se considera el subgrafo H que se obtiene de G al eliminar las aristas ya utilizadas y los vértices que no son incidentes con ninguna de las aristas que quedan.

Como G es conexo, H tiene al menos un vértice en común con el circuito que se ha eliminado. Sea w ese vértice.

Todos los vértices de H tienen grado par, porque todos los vértices de G tenían grado par y en cada uno de ellos se han eliminado aristas por parejas para formar H . Nótese que H puede ser no conexo.

Se construye, comenzando en w , un circuito simple eligiendo tantas aristas como sea posible tal cual se hizo en G .

A continuación, se forma un circuito en G concatenando el circuito en H con el circuito original en G . Esto se puede hacer porque w es uno de los vértices del circuito en G .

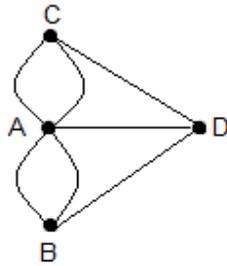
Este proceso continúa hasta que se usan todas las aristas, el proceso tiene que acabar ya que hay un número finito de aristas en el multigrafo. Esto produce un circuito euleriano. La construcción demuestra que, si todos los vértices de un multigrafo conexo tienen grado par, entonces el grafo contiene un circuito euleriano.

Estos dos últimos resultados (condición necesaria y suficiente) se pueden resumir en el siguiente teorema.

Teorema 9:

Un multigrafo conexo contiene un circuito euleriano si y solo si cada uno de sus vértices tiene grado par.

Este teorema permite resolver el “*Problema de los puentes de Königsberg*” que se enunció en la introducción del tema. El multigrafo que modela el problema, (cada porción de tierra está representada por un vértice y cada puente por una arista) es el siguiente.



Dado que el multigrafo tiene cuatro vértices de grado impar, no contiene ningún circuito euleriano. No hay ninguna forma de comenzar en un punto, cruzar cada puente exactamente una vez y volver al mismo punto de partida. El siguiente es el Algoritmo de Fleury, que es utilizado para obtener un circuito euleriano.

Algoritmo de Fleury: Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con todos sus vértices de grado par.

Paso 1: Elíjase cualquier vértice v de V como vértice inicial del circuito a construir. Sea $\pi: v$ el inicio del circuito por construir.

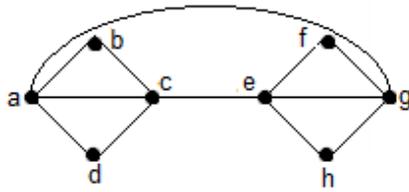
Paso 2: Supóngase que ya se ha construido $\pi: v, u, \dots, w$. Si en w solo existe una arista $\{w, z\}$ se extiende $\pi: v, u, \dots, w, z$. Se elimina $\{w, z\}$ de E y w de V . Si en w existen varias aristas, se elige una que no sea un puente $\{w, z\}$. Se extiende π a $\pi: v, u, \dots, w, z$ y se elimina $\{w, z\}$ de E .

Paso 3: Repítase el paso 2 hasta que no sobren aristas en E .

Fin del algoritmo.

Ejemplo:

Utilizar el Algoritmo de Fleury para construir un circuito euleriano para el siguiente grafo.



Por el paso 1, se puede comenzar en cualquier vértice. Se elige el vértice a de manera arbitraria. A continuación se resume la aplicación del paso 2.

Circuito	Arista eliminada	Vértice eliminado
{a}	--	--
{a, b}	{a, b}	--
Circuito	Arista eliminada	Vértice eliminado
{a, b, c}	{b, c}	b
{a, b, c, a}	{c, a}	--
{a, b, c, a, d}	{a, d}	--
{a, b, c, a, d, c}	{d, c}	d
{a, b, c, a, d, c, e}	{c, e}	c
{a, b, c, a, d, c, e, g}	{e, g}	--
{a, b, c, a, d, c, e, g, f}	{g, f}	--
{a, b, c, a, d, c, e, g, f, e}	{f, e}	f
{a, b, c, a, d, c, e, g, f, e, h}	{e, h}	e
{a, b, c, a, d, c, e, g, f, e, h, g}	{h, g}	h
{a, b, c, a, d, c, e, g, f, e, h, g, a}	{g, a}	g

En general, si un grafo contiene un circuito euleriano, contiene varios circuitos distintos.

Todo circuito es, por definición, un camino, pero no necesariamente todo camino es un circuito. Se demostrará a continuación un teorema relacionado con los caminos eulerianos.

Teorema 10:

Un multigrafo conexo contiene un camino euleriano, pero no un circuito, si y sólo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar.

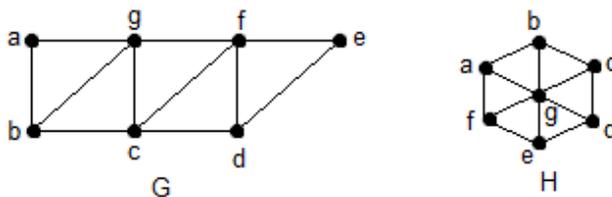
Demostración:

Supóngase que un multigrafo conexo contiene un camino euleriano del vértice a al vértice b , pero no contiene ningún circuito euleriano. La primera arista del camino contribuye con uno al grado de a . Cada vez que el camino atraviesa a se hace una contribución de dos a su grado. La última arista contribuye con uno al grado de b . Cada vez que el camino atraviesa b se hace una contribución de dos a su grado. Por lo tanto, ambos vértices a y b tienen grado impar. Cualquier otro vértice tiene grado par, puesto que el camino contribuye con dos al grado de un vértice cada vez que lo atraviesa.

Considérese ahora el recíproco. Supóngase que un grafo tiene exactamente dos vértices de grado impar: a y b . Téngase en cuenta el grafo que se obtiene al añadir al grafo original una arista $\{a, b\}$. Cada vértice de este nuevo grafo tiene grado par, por lo que contiene un circuito euleriano. Eliminando de ese circuito la nueva arista, se obtiene un camino euleriano en el grafo original.

Ejemplo:

Sean los siguientes grafos.



El grafo G tiene exactamente dos vértices de grado impar b y d , por lo tanto tiene un camino euleriano con esos extremos. Un camino euleriano cuyos extremos son b y d , puede ser: $b, a, g, c, f, e, d, c, b, g, f$.

El grafo H tiene exactamente seis vértices de grado impar, por lo tanto, no contiene un camino euleriano.

6.2. CAMINOS Y CIRCUITOS HAMILTONIANOS

Otro tipo de problemas relacionados con grafos son aquellos donde la tarea consiste en visitar cada vértice solo una vez, con la excepción del vértice inicial, si este también debe ser el último. Por ejemplo, esta situación podría ser útil para una persona que deba visitar regularmente ciertos lugares. Se puede representar dichos lugares mediante un vértice e idear un circuito para que los visite una vez y vuelva al punto de partida.

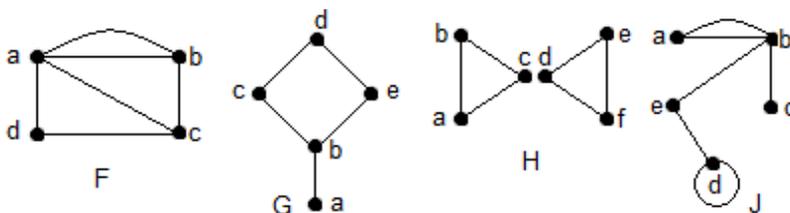
Un camino hamiltoniano es aquel que contiene cada vértice solo una vez, mientras que un circuito hamiltoniano es aquel que contiene cada vértice una solo una vez, a excepción del primero que también es el último.

Definición:

Un circuito hamiltoniano de un grafo G es un circuito simple que contiene a todos los vértices de G . Un camino hamiltoniano es un camino simple que contiene a todos los vértices de G .

Ejemplo:

Sean los siguientes grafos.



Se puede observar que en el grafo F existe un circuito hamiltoniano, a, b, c, d, a . En el grafo G existe un camino hamiltoniano, por ejemplo, c, d, e, b, a ; pero verifíquese que no existe un circuito hamiltoniano.

Al no ser conexo el grafo H, no existe ni camino ni circuito hamiltoniano. Si bien el grafo J es conexo, verifíquese que tampoco existe camino ni circuito hamiltoniano.

Otro clásico ejemplo en donde se pueden observar circuitos hamiltonianos son los grafos completos K_n . De hecho, se puede partir de cualquier vértice y visitarse los demás en forma secuencial y en el orden deseado.

Pudiere pensarse que el problema de decidir si un grafo contiene un circuito hamiltoniano es muy similar al problema de decidir si un grafo contiene o no un circuito euleriano y se podría esperar hallar una condición necesaria y suficiente para que un grafo contenga un circuito hamiltoniano.

Sorprendentemente tal condición no se conoce. Sin embargo, se conocen teoremas que dan condiciones suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos, así como propiedades que pueden ser utilizadas para probar si un grafo contiene ciclos hamiltonianos.

Ejemplo:

Un grafo con un vértice de grado 1 no puede contener un ciclo hamiltoniano, ya que en estos ciclos cada vértice es incidente con dos aristas del ciclo.

Si $G = (V, E)$ tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $\forall v \in V, \delta(v) \geq 2$.

Si $v \in V$ y $\delta(v) = 2$, entonces las dos aristas incidentes en el vértice v deben estar incluidas en cualquier ciclo hamiltoniano de G .

Si $v \in V$ y $\delta(v) > 2$, cuando se trata de construir un ciclo hamiltoniano, una vez que se pasa por el vértice v se deja de tener en cuenta las aristas no utilizadas incidentes en v .

Si al quitar k vértices del grafo G se producen más de k componentes conexas, entonces G no puede contener un ciclo hamiltoniano. Esto se deduce del hecho de que en un ciclo la anterior situación es imposible.

Si un grafo G de n vértices tiene un circuito hamiltoniano, entonces G debe tener al menos n aristas.

A continuación se presentarán dos de los más importantes resultados que establecen condiciones suficientes para la existencia de circuitos hamiltonianos. Estos enunciados son de existencia, no proporcionan métodos para construir un circuito hamiltoniano.

Teorema 11 (Teorema de Ore):

Sea G un grafo simple con n vértices ($n \geq 3$) tal que $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes u y v , entonces G tiene un circuito hamiltoniano.

Se omitirá la demostración de este teorema, pero mediante él se puede demostrar el siguiente corolario.

Corolario (Teorema de Dirac):

Sea G un grafo simple con n vértices ($n \geq 3$) tal que todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que $\frac{n}{2}$, entonces G contiene un circuito hamiltoniano.

Demostración:

La suma de los grados de cualesquiera dos vértices es al menos $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, por lo que satisface la hipótesis del teorema de Ore.

El siguiente teorema recurre al número de aristas y al teorema de Ore para establecer otra condición suficiente para la existencia de un circuito hamiltoniano.

Teorema 12:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con n vértices y $\#E = m$ (n^o de aristas).

Si $m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$, entonces G tiene un circuito hamiltoniano.

Demostración:

Supóngase que u y v son dos vértices cualesquiera, no adyacentes, de G . Sea H el subgrafo que se obtiene al eliminar u y v de G junto con las aristas que inciden en ellos. Entonces H tiene $(n - 2)$ vértices y $m - \delta(u) - \delta(v)$ aristas (habría que eliminar una arista más si u y v fueran adyacentes). El número máximo de aristas que H podría tener es $C_{n-2, 2}$. Esto sucede cuando existe una arista que une a cada par distinto de vértices. Por lo tanto, el número de aristas de H es a lo sumo:

$$C_{n-2, 2} = \frac{(n-2)!}{2(n-4)!} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

$$C_{n-2, 2} = \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$$

Entonces se tiene que:

$$m - \delta(u) - \delta(v) \leq \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$$

$$\delta(u) + \delta(v) \geq m - \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$$

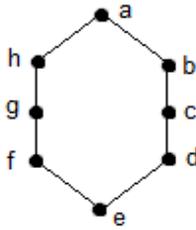
Por la hipótesis del teorema $m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$ entonces

$$\delta(u) + \delta(v) \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6) - \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$$

$$\delta(u) + \delta(v) = n$$

Así, el resultado es consecuencia del teorema de Ore. Por lo tanto, G tiene un circuito hamiltoniano.

Los recíprocos de los tres teoremas anteriores no son válidos, es decir, las condiciones dadas son suficientes, pero no necesarias. Obsérvese el siguiente grafo simple.



En este caso $n = 8$ el número de vértices, cada uno de los cuales tiene grado 2. Obsérvese que $\delta(u) + \delta(v) = 4$ para cada par de vértices no adyacentes u y v , con lo cual no se satisfacen las premisas del teorema de Ore. El número de aristas es 8 o sea $m = 8$ con lo que no se satisface la premisa del teorema 12. A pesar de esto, existen en el grafo dado circuitos hamiltonianos.

7. APLICACIONES DE GRAFOS

Los problemas que se pueden resolver con técnicas de la teoría de grafos aparecen en diversas disciplinas. Por ejemplo, se puede usar grafos para representar la competición de distintas especies en un mismo nicho ecológico o bien para representar los resultados de un torneo deportivo. Incluso se puede usar grafos para diseñar pasatiempos.

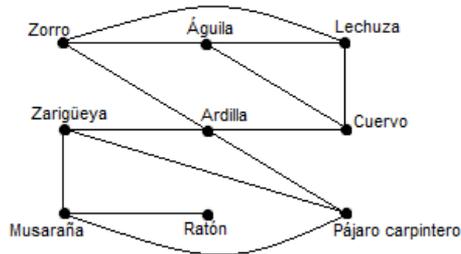
7.1. GRAFOS COMO MODELOS

Se presentan a continuación algunos modelos de distintas áreas:

- Grafos de solapamiento de nichos en Ecología

Los grafos se pueden emplear en muchos modelos que tienen que ver con las interacciones entre especies animales distintas. Por ejemplo, la competición entre especies en un ecosistema puede representarse mediante un *grafo de solapamiento de nichos*. Cada especie se representa por un vértice. Una arista no dirigida conecta dos vértices si las dos especies representadas por esos vértices compiten entre sí, es decir, si algunas de las fuentes de alimento de las que se nutren son las mismas.

Se presenta a continuación un pequeño ejemplo.



Obsérvese que los zorros y las ardillas compiten entre sí, mientras que los cuervos y las musarañas no lo hacen.

- Grafos de la red

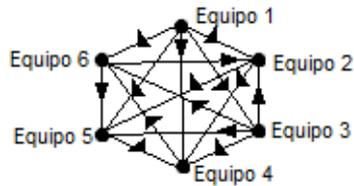
La red de internet se puede representar por medio de un grafo dirigido en el que cada página web está representada por un vértice y en el que cada arista comienza en una página a y termina en la página b si existe un enlace entre ambas páginas. Como cada segundo se crean páginas web nuevas y otras desaparecen, el grado de la red está en estado de cambio permanente. Se estima que el grafo de la red tiene más de mil millones de vértices y decenas de miles de millones de aristas.

Hay muchas personas estudiando las propiedades del grafo de la red, para entender mejor la naturaleza de la red de internet.

- Grafos torneo todos contra todos

Un torneo en donde cada equipo se enfrenta exactamente una vez a cada uno de los restantes se llama *torneo de todos contra todos*. Estos torneos se pueden representar usando grafos dirigidos en los que cada equipo se representa mediante un vértice. Nótese que el par ordenado (a, b) es una arista si el equipo a vence al equipo b .

Se muestra a continuación un grafo de este tipo.



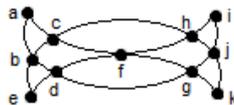
Obsérvese que el Equipo 1 no perdió ningún partido, mientras que el Equipo 4, de los cinco partidos disputados, ganó uno y perdió los restantes cuatro.

- Grafos de colaboración

Los llamados *grafos de colaboración* sirven para modelar las coautorías de artículos académicos. En un grafo de colaboración, los vértices representan personas –restringidas tal vez, a una cierta comunidad científica– y una arista conecta a dos personas si éstas han escrito conjuntamente un artículo.

7.2. GRAFOS COMO PASATIEMPOS

En muchos pasatiempos se pide dibujar una figura con un solo trazo continuo sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ningún trazo. Estos pasatiempos se pueden resolver utilizando caminos y circuitos eulerianos. Por ejemplo, ¿pueden dibujarse así las *Cimitarras de Mahoma* que se muestran a continuación, comenzando y terminando el dibujo en el mismo punto?



TRABAJO PRÁCTICO: GRAFOS I

1. ¿Qué tipo de grafo se puede utilizar para representar un sistema de autopistas entre grandes ciudades si:

a) hay una arista entre los vértices que representan a dos ciudades y si hay una autopista que las conecta?

b) hay una arista entre los vértices que representan a dos ciudades por cada autopista que las conecta?

c) hay una arista entre los vértices que representan a dos ciudades por cada autopista que las conecta?, y si la ciudad posee autopista de circunvalación ¿se considera que está conectada consigo mismo?

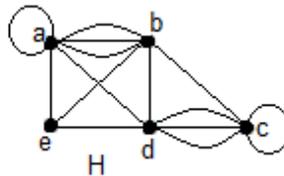
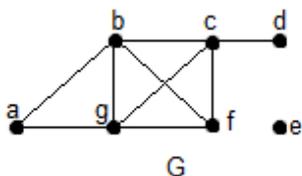
2. El *grafo de intersección* de una colección de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n es un grafo que tiene un vértice por cada conjunto y que tiene una arista entre los vértices si los dos conjuntos tienen intersección no vacía. Construir el grafo de intersección de los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}, \quad A_2 = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0\},$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\},$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}, \quad A_5 = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}, \quad A_6 = \mathbb{R}$$

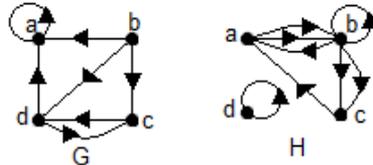
3. a) Para cada uno de los siguientes grafos, hallar el número de vértices, de aristas y el grado de cada vértice. Identificar los vértices aislados y las hojas.



b) Hallar la suma de los grados de los vértices para cada grafo y comprobar que coincide con el doble del número de aristas.

4. ¿Puede existir un grafo de 15 vértices, cada uno de ellos de grado 5? Justificar.

5. a). Para cada uno de los siguientes grafos dirigidos, hallar el número de vértices, de aristas, el grado de entrada y de salida de cada vértice.



b) Hallar la suma de los grados de entrada y la suma de los grados de salida de los vértices para cada grafo y comprobar que ambos coinciden con el número de aristas que hay en el grafo.

6. Dibujar los siguientes grafos: a) K_7 , b) $K_{1,8}$, c) $K_{4,4}$, d) C_7 , e) W_7 , f) Q_4 .

7. ¿Cuántos vértices y cuántas aristas tiene cada uno de los siguientes grafos?

a) K_n , b) C_n , c) W_n , d) $K_{m,n}$, e) Q_n

8. ¿Existe algún grafo simple de cinco vértices con los grados siguientes? Si es así, dibujar un grafo con esa propiedad, caso contrario justificar.

a) 3, 3, 3, 3, 2

b) 1, 2, 3, 4, 4

c) 1, 2, 3, 4, 5

d) 3, 4, 3, 4, 3

9. a) ¿Cuántos subgrafos distintos se pueden extraer de K_3 ? Dibujarlos.

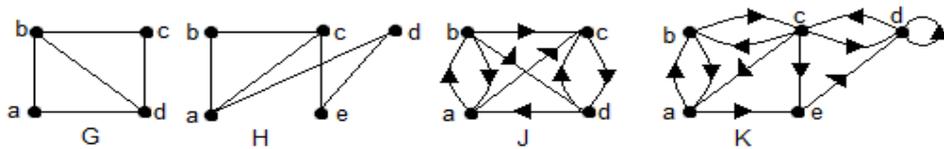
b) ¿Cuántos subgrafos distintos se pueden extraer de W_3 ? Dibujarlos.

10. ¿Para qué valores de n son regulares los grafos

a) K_n , b) C_n , c) W_n , d) Q_n ?

11. Hallar los siguientes grafos a) $\overline{K_4}$, b) $\overline{C_5}$

12. a) Representar los siguientes grafos mediante una matriz de adyacencia.

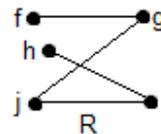
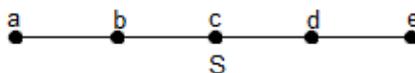
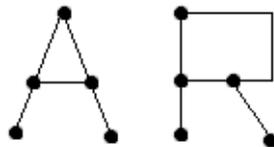
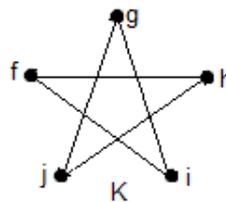
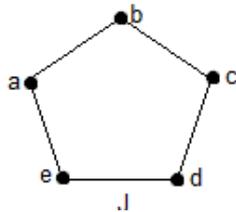
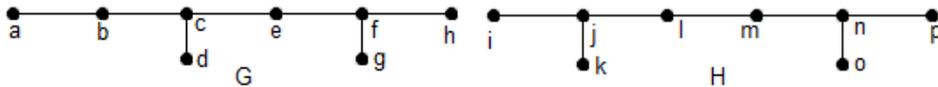


b) Representar los grafos G y H del ítem a), mediante una matriz de incidencia.

13. Dibujar un grafo cuya matriz de adyacencia sea la que se da a continuación.

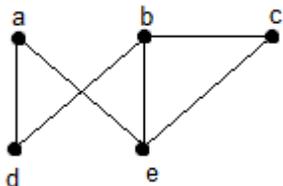
$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad M_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Para cada par de grafos que se dan a continuación, construye un isomorfismo o proporciona un argumento que demuestre que no existe un isomorfismo entre ellos.



TRABAJO PRÁCTICO: GRAFOS II

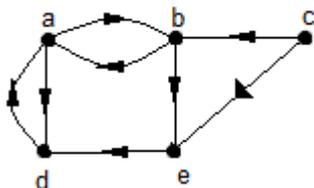
1. Dado el siguiente grafo y listas de vértices.



- a) a, e, b, c, b.
- b) a, e, a, d, b, c, a.
- c) e, b, a, d, b, e.
- d) c, b, d, a, e, c.

Para cada una de las listas de vértices, indicar si son o no caminos. Para las que sean caminos, indicar cuáles son simples, cuáles son circuitos y qué longitud tienen.

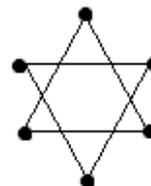
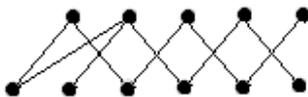
2. Dado el siguiente dígrafo y listas de vértices.



- a) a, b, e, c, b.
- b) a, d, a, d, a.
- c) a, d, b, e, a.
- d) a, b, e, c, b, d, a.

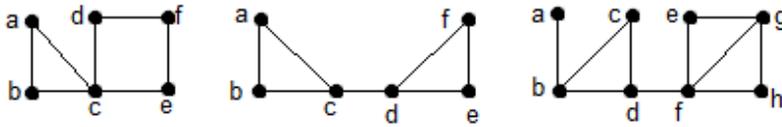
Para cada una de las listas de vértices, indicar si son o no caminos. Para las que sean caminos, indicar cuáles son simples, cuáles son circuitos y qué longitud tienen.

3. Para cada uno de los siguientes tres grafos

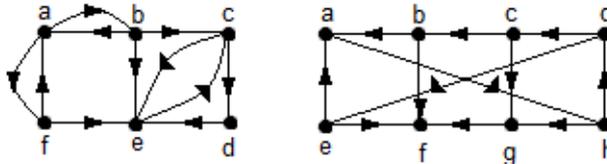


Determinar si es o no conexo. Hallar cada una de las componentes conexas.

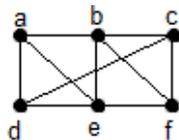
4. Hallar todos los vértices y aristas de corte para cada uno de los siguientes grafos



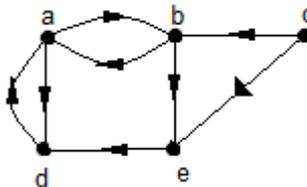
5. Hallar las componentes fuertemente conexas de cada uno de los siguientes dígrafos.



6. a) Hallar el número de caminos entre el vértice c y el vértice d en el siguiente grafo, que tengan longitud 2, 3 y 4.

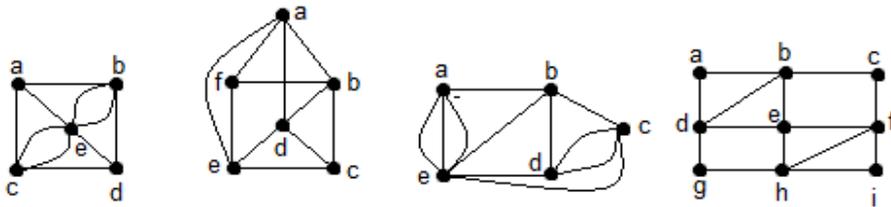


b) Hallar el número de caminos entre el vértice a y el vértice e en el siguiente dígrafo, que tengan longitud 3, 4 y 5.

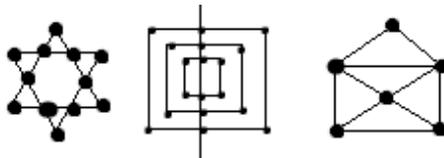


c) Hallar el número de caminos de longitud 3, 4 y 5 entre dos vértices diferentes de K_4 .

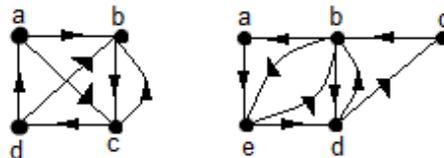
7. Para cada uno de los siguientes grafos, determinar si contiene o no un circuito euleriano. Construir uno en el caso de que exista. Si no existe ningún circuito euleriano determinar si el grafo contiene o no un camino euleriano y construir uno en el caso de que exista.



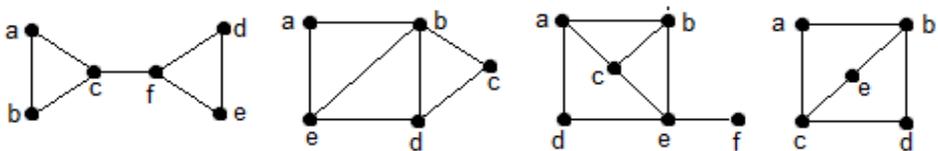
8. Para cada uno de los siguientes dibujos, determinar si se puede o no trazarlo de manera continua sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ningún trazo. Justificar la respuesta.



9. Para cada uno de los siguientes dígrafos, determinar si contiene o no un circuito euleriano. Construir uno en el caso de que exista. Si no existe ningún circuito euleriano determinar si el grafo contiene o no un camino euleriano y construir uno en el caso de que exista.



10. Para cada uno de los siguientes grafos, determinar si contiene o no un circuito hamiltoniano. Hallar uno en el caso de que exista. En caso contrario, argumentar por qué no existe ningún circuito hamiltoniano.



AUTOEVALUACIÓN: GRAFOS I

1. Responder Verdadero o Falso, NO justificar la respuesta.

- a) Todo multigrafo es pseudografo.
- b) En un dígrafo, el grado de entrada de un vértice v es el número de aristas que tienen a v como vértice final.
- c) En el grafo K_6 , el número de aristas es 30.
- d) El grafo W_5 es bipartito.
- e) Un grafo con 5 vértices tiene 120 matrices de adyacencia que lo representan

2. Completar con la respuesta correcta.

- a) Un dígrafo $G = (V, E)$ es regular si $\forall v \in V$ se cumple que.....
- b) En el grafo W_6 el número de vértices es..... y el número de aristas es.....
- c) Sean H y G dos grafos. H es subgrafo abarcador de G si H es un..... de G y además H contiene todos..... de G .
- d) Si en la matriz de adyacencia de un grafo simple se suman los unos de la fila o columna de un vértice, se obtiene.....
- e) Si en la matriz de incidencia de un pseudografo, la columna correspondiente a la arista e tiene un solo uno, significa que esa arista es.....

3. Escribir en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) Un multigrafo dirigido acepta

A) Solamente aristas múltiples

B) Solamente bucles

C) Aristas múltiples o bucles

D) Aristas múltiples y bucles.

b) Sea $G = (V, E)$ un grafo, $H = (V', E')$ es subgrafo de G si

A) $V \subseteq V'$ y $E \subseteq E'$ B) $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$

C) $V' \subseteq V$ ó $E' \subseteq E$ D) $V \subseteq V'$ ó $E \subseteq E'$

c) El grafo N_6 , tiene

A) 6 aristas y ningún vértice B) 6 vértices y ninguna arista

C) 6 aristas y 6 vértices D) Ningún vértice y ninguna arista.

d) El grafo completo bipartito $K_{m, n}$ tiene

A) $m + n$ aristas y $m \cdot n$ vértices B) m^n vértices y $m \cdot n$ aristas

C) $m + n$ vértices y $m \cdot n$ aristas D) $m + n$ vértices y m^n aristas

e) Los grafos G y H tienen el mismo número de vértices, el mismo número de aristas y ambos tienen el subgrafo K_3 , entonces G y H

A) Son isomorfos B) No son isomorfos C) Pueden o no ser isomorfos

AUTOEVALUACIÓN: GRAFOS II

1. Responder Verdadero o Falso, NO justificar la respuesta.

a) Todo circuito es un camino.

b) Si en $G = (V, E)$ hay un camino entre cada par de vértices distintos, entonces G es conexo.

c) Si en un grafo G se elimina un vértice y las aristas que inciden en él, y se produce un subgrafo con más componentes conexas que las que tenía el grafo G , entonces ese vértice es un puente.

d) Un camino euleriano es un camino simple que contiene todos los vértices del grafo.

e) Un circuito hamiltoniano de un grafo G es un circuito simple q contiene todas las aristas de G .

2. Completar con la respuesta correcta.

a) Para que un grafo G sea conexo, el número de aristas debe ser.....

b) En un grafo no dirigido $G = (V, E)$ la relación “estar conectado con” cumple con las siguientes tres propiedades.....

c) Un dígrafo es fuertemente conexo si.....

d) Si un multigrafo conexo tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces contiene.....

e) Sea G un grafo simple con n vértices ($n \geq 3$) tal que todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que $\frac{n}{2}$, entonces G contiene.....

3. Escribir en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) En un grafo no dirigido simple, un camino de longitud cero

A) No puede existir B) Tiene un solo vértice C) Tiene una sola arista

b) Un multigrafo conexo que tiene todos sus vértices de grado par, contiene un

A) Camino pero no un circuito euleriano B) Circuito pero no un camino euleriano C) Circuito euleriano

c) Un grafo que tiene un vértice de grado uno

A) No contiene un ciclo hamiltoniano B) Contiene un ciclo hamiltoniano
C) Puede o no contener un ciclo hamiltoniano.

d) Si un grafo G de n vértices tiene un circuito hamiltoniano, entonces el número de aristas de G , es

A) Igual a n B) Menor que n C) Mayor que n D) Mayor o igual que n .

e) Si dos grafos tienen igual número de vértices, igual número de aristas y ambos tienen un circuito simple de longitud 4, entonces los grafos

A) Son isomorfos B) No son isomorfos C) Pueden o no ser isomorfos

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN: GRAFOS

Para cada uno de los siguientes enunciados, escribir el programa o subrutina solicitado. En cada caso, el usuario deberá ingresar:

- 1.** Los pares de vértices asociados a las aristas de un pseudografo y se deberá mostrar el grado de cada vértice.
- 2.** Los pares de vértices asociados a las aristas de un multigrafo dirigido y se deberá mostrar los grados de entrada y salida de cada vértice.
- 3.** La lista de aristas de un grafo simple y se deberá determinar si el grafo es o no bipartito.
- 4.** Los pares de vértices asociados a las aristas de un pseudografo y se deberá mostrar la matriz de adyacencia.
- 5.** Los pares de vértices asociados a las aristas de un multigrafo dirigido y se deberá mostrar la matriz de adyacencia.
- 6.** La matriz de adyacencia de un grafo y se deberá mostrar la lista de aristas del grafo y el número de veces que aparece cada arista.
- 7.** Los pares de vértices asociados a las aristas de un grafo no dirigido y el número de veces que aparece cada vértice y se deberá mostrar la matriz de incidencia.
- 8.** Un entero positivo n , se deberá generar en forma aleatoria la matriz de adyacencia de un grafo simple y mostrar dicha matriz.
- 9.** La matriz de incidencia de un grafo no dirigido y se deberá mostrar una lista de sus aristas y el número de veces que aparece cada arista.
- 10.** Las listas de las aristas de dos grafos simples con no más de seis vértices y se deberá determinar si los grafos son o no isomorfos.

- 11.** La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido y un entero positivo n , se deberá hallar el número de caminos de longitud n entre dos vértices del grafo.
- 12.** La matriz de adyacencia de un grafo dirigido y un entero positivo n , se deberá hallar el número de caminos de longitud n entre dos vértices del grafo.
- 13.** Los pares de vértices asociados a las aristas de un multigrafo conexo, se deberá determinar si contiene algún circuito euleriano, de no ser así, si contiene algún camino euleriano y construir un camino o circuito euleriano si existe.

BIBLIOGRAFÍA

Comellas, F.; Fábrega, J.; Sánchez, A. y Serra, O. (2001). *Matemática discreta*. (Primera edición). (Traducción: Gabriel Valiente. Ediciones UPC). España: Universidad Politécnica de Catalunya.

Disset, L. (2004). *Apuntes de Clases – Matemática Discreta*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile.

González Gutiérrez, F. J. (2004). *Apuntes de Matemática Discreta. Grafos*. Universidad de Cádiz. Escuela Superior de Ingeniería. Departamento de Matemáticas. Cádiz.

Gutiérrez Jiménez, J. M. y Lanchares Barrasa, V. (2010). *Elementos de Matemática Discreta*. España: Universidad de la Rioja. Servicio de Publicaciones.

Jiménez Murillo, J. (2011). *Matemática para la computación*. (Primera edición). México: Alfa Omega Grupo editor S. A. México.

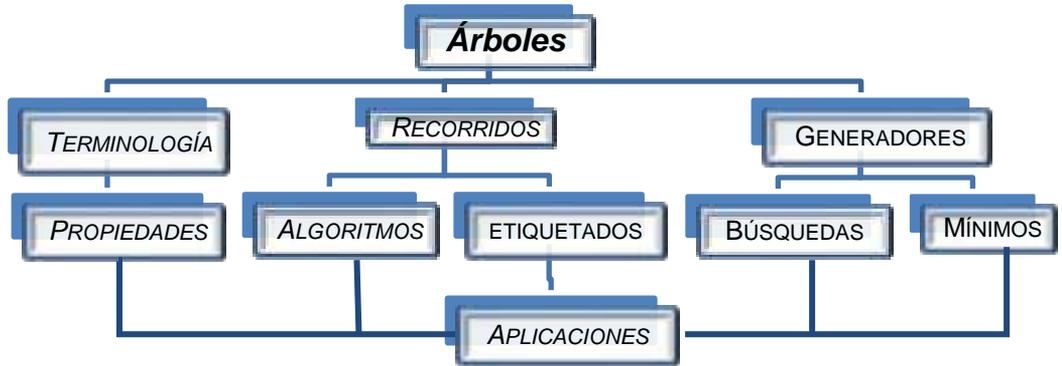
Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. (Sexta edición). (Traducción de: Gonzales Osuna, M.). México: Pearson Educación Prentice Hall.

Kolman, B.; Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de Matemáticas discretas para la Computación*. (Tercera edición). (Traducción de: Palmas Velasco, O.). México: Editorial: Prentice – Hall Hispanoamericana S. A.

Lipschutz, S. y Lipson, M. L. (2009). *Matemáticas Discretas*. (Tercera Edición). (Traducción: Hugo Villagómez Velázquez). México: Mc Graw Hill. Interamericana Editores.

Rosen, K. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (Quinta edición). (Traducción: Pérez Morales y otros). España: Mc Graw Hill.

ÁRBOLES



OBJETIVOS

- ✓ Brindar los principios básicos para poder estudiar y realizar aplicaciones del tema árboles.
- ✓ Reconocer los diferentes tipos de árboles, como también sus propiedades y diferentes aplicaciones.
- ✓ Determinar las características que debe poseer un grafo para ser árbol y obtener un árbol a partir de un grafo.
- ✓ Resolver problemas de informática haciendo uso del modelo que brinda el tema árboles.
- ✓ Aplicar la estructura de árbol para la organización y procesamiento de la información.

Árboles

1. INTRODUCCIÓN

Un grafo conexo que no posea ciclos es un árbol. Estos grafos son llamados así porque se asemejan a los árboles. Por ejemplo, los árboles genealógicos son grafos en los que se presentan relaciones de parentesco. Se utilizan los vértices para los miembros de una familia y las aristas para representar las relaciones entre padres e hijos.

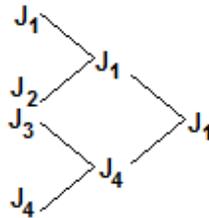
Los árboles empezaron a utilizarse en 1857, cuando el matemático inglés Arthur Cayley los utilizó para contar cierto tipo de componentes químicos. Desde entonces, los árboles se han empleado para resolver problemas en una gran variedad de disciplinas, tales como problemas de probabilidad, problemas de toma de decisiones, análisis de la conexión de un grafo, búsqueda de ciclos hamiltonianos para resolver el problema del viajante, problemas de optimización, etc.

Particularmente, en informática, los árboles son empleados en un amplio espectro de algoritmos. Por ejemplo, para construir algoritmos eficientes que localizan elementos en una lista, para construir códigos compresores eficientes, para ahorrar costes en la transmisión de datos y en su posterior almacenamiento; como se usan los códigos de Huffman. Los árboles también pueden utilizarse para modelar procedimientos que se llevan a cabo mediante una secuencia de decisiones. Construir estos modelos puede ayudar a determinar la complejidad computacional de los algoritmos basados en una secuencia de instrucciones, como los algoritmos de ordenación.

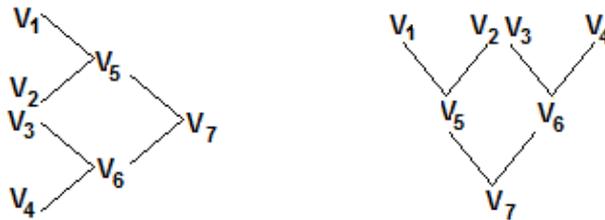
2. ÁRBOLES

En el tenis existe una competencia que se conoce como *torneo por eliminación sencilla*, cuando un jugador pierde, sale del torneo. Los ganadores siguen jugando hasta que queda solo una persona: el campeón.

Se podría esquematizar un torneo por eliminación sencilla para cuatro jugadores y observar la trayectoria del campeón, en la siguiente figura.



Si el torneo por eliminación sencilla de la figura anterior es visto como un grafo, se obtiene un árbol. Si se rota este grafo, puede entenderse el porqué de su nombre.



Se pueden dar dos definiciones formales de árboles.

Definición 1:

Un árbol es un grafo no dirigido, conexo y sin ciclos.

Puesto que un árbol no puede contener ciclos, es un grafo acíclico; tampoco puede tener bucles o aristas múltiples, por lo tanto, un árbol es necesariamente un grafo simple.

Definición 2:

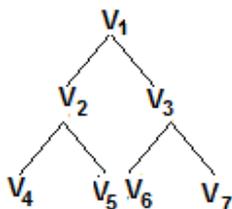
Un árbol T (libre) es un grafo que satisface lo siguiente: si v y w son vértices en T , existe un camino simple de v a w .

Un árbol con raíz es un árbol en el que un vértice específico se designa como raíz.

Si se designa al ganador como raíz, el torneo por eliminación sencilla del ejemplo es un árbol con raíz. Obsérvese que si v y w son vértices en este grafo, existe un camino simple único de v a w . Por ejemplo, el camino simple único de v_6 a v_2 se expresa como v_6, v_7, v_5, v_2 .

Al contrario de los árboles naturales, cuyas raíces se localizan abajo, en la teoría de grafos los árboles con raíces suelen dibujarse con la raíz hacia arriba. Primero, se coloca la raíz v_1 arriba. Abajo de la raíz y al mismo nivel, se colocan los vértices v_2 y v_3 , a los que se puede llegar desde la raíz por un camino simple de longitud 1. Abajo de estos vértices y al mismo nivel se colocan los restantes vértices v_4, v_5, v_6 y v_7 , a los que se llega desde la raíz por caminos simples de longitud 2. Se continúa así hasta dibujar el árbol completo.

Finalmente, el árbol del ejemplo que se analiza es el siguiente.

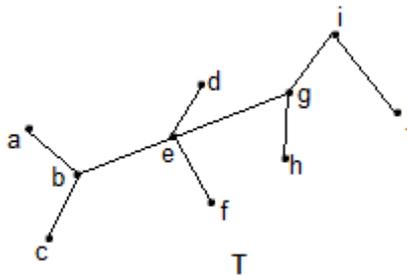


Como el camino simple de la raíz a cualquier vértice dado es único, cada vértice está en un nivel determinado de manera única. El nivel de la raíz es el nivel 0. Se dice que los vértices que se encuentran abajo de la raíz están en el nivel 1, y así sucesivamente. Entonces, el nivel de un vértice v es la longitud del

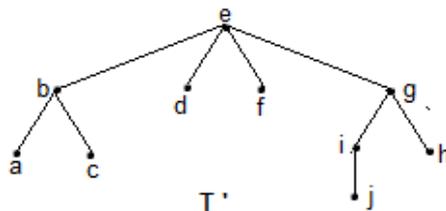
camino simple de la raíz a dicho vértice. La *altura* de un árbol con raíz es el número máximo de nivel que ocurre.

Para este árbol, el vértice v_1 que es la raíz está a nivel cero. Los vértices v_2 y v_3 están en el nivel 1 y los vértices v_4 , v_5 , v_6 y v_7 están en el nivel 2. Por lo tanto, la altura del árbol es 2.

Ejemplo: Sea el siguiente grafo



Si se designa, por ejemplo, al vértice e como raíz se obtiene el árbol con raíz T' . Allí se puede observar que los vértices b , d , f y g están en el nivel 1 mientras que los vértices a , c , i y h están en el nivel 2. El vértice j está en el nivel 3. La altura de T' es 3.



Otro ejemplo de árbol son los llamados *árboles de definición jerárquica*. Estos árboles se usan para mostrar las relaciones entre los registros de una base de datos. El árbol que se presenta a continuación se puede usar como modelo para establecer una base de datos destinada a mantener los registros de los libros en varias bibliotecas.



2.1. TERMINOLOGÍA Y CARACTERIZACIÓN DE LOS ÁRBOLES

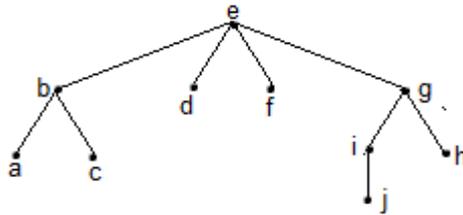
La terminología de los árboles tiene orígenes botánicos y genealógicos.

Definición:

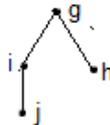
Sea T un árbol con raíz v_0 . Supóngase que x , y , z son vértices en T y que un camino simple en T es v_0, v_1, \dots, v_n . Entonces:

- a) v_{n-1} es el padre de v_n .
- b) v_0, \dots, v_{n-1} son ancestros de v_n .
- c) v_n es un hijo de v_{n-1} .
- d) Si x es un ancestro de y ; y es un descendiente de x .
- e) Si x e y son hijos de z , x e y son hermanos.
- f) Si x no tiene hijos, x es un vértice terminal u hoja.
- g) Si x no es un vértice terminal, x es un vértice interno.
- h) El subárbol de T con raíz en x , es el subgrafo del árbol que contiene al vértice x , a todos sus descendientes y a todas las aristas incidentes en dichos descendientes.
- i) El nivel de un vértice v es la longitud del camino simple de la raíz a dicho vértice. La altura de un árbol con raíz es el número máximo de nivel que ocurre.

Sea el siguiente árbol con raíz "e".



El vértice g es el padre de los vértices i y h, por lo tanto, i y h son hermanos. El vértice j es una hoja cuyos ancestros son i, g, e. Los vértices internos del árbol son b, e, g, i. El subárbol con raíz en g es el siguiente.



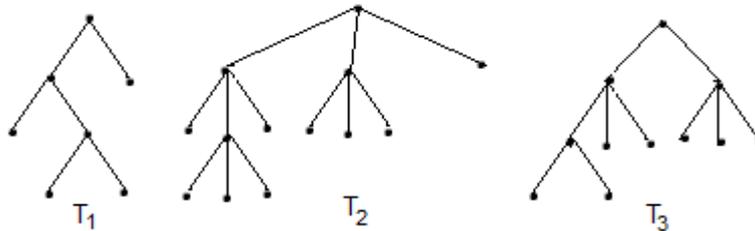
La raíz e tiene nivel 0, mientras que los vértices b, d, f, y g forman el nivel 1; los vértices a, c, i y h, el nivel 2, y solamente el vértice j forma el nivel 3. La altura del árbol es 3.

Los árboles con raíz que cumplen la propiedad de que todos sus vértices internos tienen el mismo número de hijos, se utilizan en múltiples aplicaciones.

Definición:

Un árbol con raíz se llama m-ario si todos los vértices internos tienen, a lo sumo, m hijos. El árbol se llama árbol m-ario completo si todo vértice interno tiene exactamente m hijos. Un árbol m-ario con $m = 2$ se llama binario.

Sean los siguientes árboles:



T_1 es un árbol binario completo, ya que todos sus vértices internos tienen exactamente dos hijos. T_2 es un árbol ternario completo, pues todos sus vértices internos tienen exactamente tres hijos. El árbol T_3 no es un árbol completo debido a que algunos de sus vértices internos tienen dos hijos mientras que otros tienen tres.

Un árbol ordenado con raíz es un árbol con raíz en el que los hijos de cada vértice interno están ordenados. Estos árboles se dibujan de modo que los hijos de cada vértice interno se colocan ordenados de izquierda a derecha. Se hará uso de estas ordenaciones, sin hacer mención que se está considerando un árbol ordenado con raíz.

2.2. PROPIEDADES DE LOS ÁRBOLES

Con frecuencia se necesitan resultados que relacionen los números de vértices y aristas en diferentes tipos de árboles. Para estas ocasiones son de utilidad los siguientes teoremas.

Teorema 1:

Un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.

Demostración:

Se usará Inducción Matemática para demostrar este teorema. Nótese que, para cualquier árbol, se puede elegir una raíz y considerar el árbol con raíz resultante.

PB) Para $n = 1$, un árbol con un vértice no tiene aristas. De allí que el teorema sea cierto para $n = 1$.

PI) La hipótesis inductiva afirma que todo árbol con k vértices tiene $k - 1$ aristas, siendo k un entero positivo. Supóngase que un árbol T tiene $k + 1$ vértices y v es una hoja de T (que debe existir, ya que el árbol es finito) y sea w el padre de v . Si eliminamos de T tanto el vértice v como la arista que une a v con w , se obtiene un árbol T' de k vértices, puesto que el grafo es conexo y no tiene ciclos. Por la hipótesis inductiva, T' tiene $k - 1$ aristas. De ahí se deduce que T tiene k aristas ya que tiene una más que T' , la arista que conecta a v con w . Esto completa el paso inductivo.

Conclusión, un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.

El número de vértices de un árbol m -ario completo con un número prefijado de vértices internos está determinado, como lo muestra el siguiente teorema. Al igual que en el caso anterior, se denotará con n al número de vértices de un árbol.

Teorema 2:

Un árbol m -ario completo con i vértices internos tiene $n = mi + 1$ vértices

Demostración:

Todo vértice, excepto la raíz, es hijo de algún vértice interno. Puesto que cada uno de los i vértices internos tiene m hijos, hay $m \cdot i$ vértices en el árbol, diferentes a la raíz. Por lo tanto, el árbol tiene un total de $n = m \cdot i + 1$ vértices.

Supóngase que T es un árbol m -ario completo. Sea i el número de vértices internos y l el número de hojas del árbol, una vez que algunos de los enteros n, i o l es conocido, las otras dos magnitudes quedan determinadas. En el siguiente teorema se establece cómo calcular las otras dos cantidades a partir de la que ya se conoce.

Teorema 3:

Un árbol m -ario completo con:

1. *n vértices tiene $i = \frac{n-1}{m}$ vértices internos y $l = \frac{(m-1)n+1}{m}$ hojas.*
2. *i vértices internos tiene $n = m \cdot i + 1$ vértices y $l = (m - 1)i + 1$ hojas.*
3. *l hojas tiene $n = \frac{m \cdot l - 1}{m-1}$ vértices e $i = \frac{l-1}{m-1}$ vértices internos.*

Demostración:

Sea n el número de vértices, i el número de vértices internos y l el número de hojas. Los tres apartados del teorema se pueden demostrar usando la igualdad establecida en el teorema 2, $n = m \cdot i + 1$, junto con la igualdad $n = l + i$ que es cierta porque cada vértice es una hoja o un vértice interno.

Se despeja i de $n = m \cdot i + 1$, entonces $i = \frac{n-1}{m}$. Sustituyendo esta expresión en la igualdad $n = l + i$ se tiene $n = l + \frac{n-1}{m}$ de donde resulta $l = n - \frac{n-1}{m}$.

Operando esta expresión se obtiene que $l = \frac{(m-1)n+1}{m}$, quedando demostrado el primer apartado del teorema.

Para el apartado dos del teorema ya se tiene, por el teorema 2, que $n = m \cdot i + 1$. En esta expresión se sustituye la igualdad $n = l + i$, obteniéndose $l + i = m \cdot i + 1$ de donde se obtiene que $l = (m - 1)i + 1$.

Para el apartado tres se despeja i de $n = l + i$, o sea que $i = n - l$. Se reemplaza esta expresión en $n = m \cdot i + 1$. Obteniéndose $n = m(n - l) + 1$

de donde al despejar n se obtiene $n = \frac{m \cdot l - 1}{m - 1}$. Ahora en la expresión $i = n - l$ se reemplaza $n = m \cdot i + 1$ obteniéndose $i = m \cdot i + 1 - l$. Se despeja i y se obtiene $i = \frac{l - 1}{m - 1}$. De esta manera queda demostrado el apartado tres y, en consecuencia, también el teorema.

Supóngase que alguien inicia una cadena de cartas. A cada persona que recibe cada una de esas cartas se le pide que la envíe a otras cuatro. Algunas personas lo hacen, pero otras no envían ninguna carta. ¿Cuántas personas han leído la carta, incluyendo a la primera persona, si nadie recibe más de una carta y si la cadena finaliza después de que 100 personas que han visto la carta no enviaron ninguna? ¿Cuántas personas enviaron la carta?

La cadena de cartas puede ser representada por medio de un árbol 4-ario, en donde los vértices internos i se corresponden con aquellas personas que enviaron la carta y las hojas l con aquellas otras que no la enviaron.

Puesto que 100 personas no enviaron la carta, el número de hojas de este árbol es 100 ($l = 100$). De allí, por el apartado 3 del teorema 3 se tiene que el número de personas que han enviado la carta es $n = \frac{4 \cdot 100 - 1}{4 - 1} = \frac{399}{3} = 133$.

También se tiene que el número de vértices internos es $i = \frac{100 - 1}{4 - 1} = 33$, o sea que 33 personas enviaron la carta.

3. RECORRIDOS EN ÁRBOLES

Los árboles ordenados con raíz se pueden utilizar tanto para almacenar información como para representar varios tipos de expresiones; tales como expresiones aritméticas que involucran números, variables y operadores. Por lo tanto, es necesario determinar procedimientos que permitan visitar cada uno de los vértices de dichos árboles para acceder a los datos.

3.1. ALGORITMOS DE RECORRIDOS

Se describirán tres algoritmos de recorrido de un árbol, que se utilizan con más frecuencia. El nombre del recorrido indica el orden en el que se coloca el padre en relación a sus hijos. Los tipos de recorrido son: en orden primero, en orden segundo y en orden final.

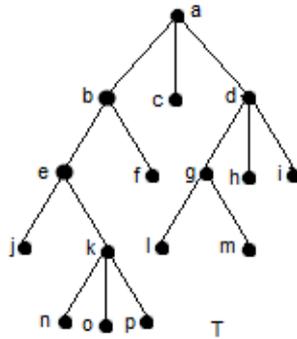
Definición:

Sea T un árbol ordenado con raíz r . Si T consta solo de r , entonces r es el recorrido en orden primero de T . En otro caso, supóngase que T_1, \dots, T_n son los subárboles de r listados de izquierda a derecha en T . El recorrido en orden primero comienza visitando r , continúa recorriendo T_1 en orden primero, luego T_2 en orden primero y así sucesivamente hasta recorrer T_n en orden primero.

En el recorrido en orden primero (padre, hijo izquierdo, demás hijos), se toma el padre, luego el hijo izquierdo y, al final, los demás hijos. Es decir que se comienza por la raíz, después se sigue por el vértice de la izquierda, si este vértice tiene hijos se sigue por el de la izquierda hasta llegar a la hoja. Si esta hoja tiene hermanos, se toma el que está más cercano a ella (más a la izquierda). Después de que se termina con la rama izquierda, se continúa con la rama más cercana a ella y así sucesivamente hasta terminar con el recorrido de todo el árbol.

Ejemplo:

Sea T un árbol ordenado con raíz.



El recorrido en orden primero es: a, b, e, j, k, n, o, p, f, c, d, g, l, m, h, i.

El algoritmo del recorrido en orden primero, de un árbol ordenado, se puede expresar en forma recursiva de la siguiente manera.

ALGORITMO: recorrido en orden primero

procedure orden primero (T: árbol ordenado con raíz)

r:= raíz de T

enumerar r

for cada hijo c de r de izquierda a derecha

begin

 T(c):= subárbol de raíz c

 orden primero (T (c))

end

Definición:

Sea T un árbol ordenado con raíz r. Si T consta solo de r, entonces r es el recorrido en orden segundo de T. En otro caso, supóngase que T_1, \dots, T_n son los subárboles de r listados de izquierda a derecha en T. El recorrido en orden segundo comienza recorriendo T_1 en orden

segundo y continúa visitando r, a continuación recorre T_2 en orden segundo y así sucesivamente hasta recorrer T_n en orden segundo.

En el recorrido en orden segundo (hijo izquierdo, padre, demás hijos) se toma el hijo izquierdo, segundo el padre y al final los demás hijos. Es decir que se comienza por la hoja que se encuentra más a la izquierda del árbol, después se regresa al padre y posteriormente a todos los hermanos; luego se regresa al padre de esta rama y con las ramas de éste (tomando siempre la que está más a la izquierda) y así sucesivamente hasta terminar con el recorrido de todo el árbol.

Continuando con el árbol T del ejemplo anterior. El recorrido en orden segundo de dicho árbol será: j, e, n, k, o, p, b, f, a, c, l, g, m, d, h, i.

El algoritmo del recorrido en orden segundo, de un árbol ordenado, se puede expresar en forma recursiva de la siguiente manera.

ALGORITMO: recorrido en orden segundo

procedure ordensegundo (T: árbol ordenado con raíz)

r:= raíz de T

if r es una hoja **then** enumerar r

else

begin

l:= primer hijo de r de izquierda a derecha

T (l) := subárbol de raíz l

ordensegundo (T (l))

listar r

for cada hijo c de r excepto para l y de izquierda a derecha

T(c) := subárbol de raíz c

ordensegundo(T (c))

end

Definición:

Sea T un árbol ordenado con raíz r . Si T consta solo de r , entonces r es el recorrido en orden final de T . En otro caso, supóngase que T_1, \dots, T_n son los subárboles de r listados de izquierda a derecha en T . El recorrido en orden final comienza recorriendo T_1 en orden final, luego recorre T_2 en orden final y así sucesivamente hasta recorrer T_n en orden final y termina visitando la raíz r .

En el recorrido en orden final (hijo izquierdo, demás hijos, padre) se toma primero el hijo izquierdo, después los demás hijos y al final el padre. Se comienza en la hoja que se encuentra más a la izquierda en el árbol, después se continúa con los hermanos, si estos tienen hijos, primeramente se recorre los hijos y al final al padre, dando preferencia a los hijos de la izquierda y al final el padre. En este tipo de recorrido lo último que se recorre es la raíz, ya que tienen preferencia los hijos sobre el padre.

Continuando con el árbol T del ejemplo anterior. El recorrido en orden final de dicho árbol será:

j, n, o, p, k, e, f, b, c, l, m, g, h, i, d, a.

ALGORITMO: recorrido en orden final

procedure ordenfinal (T: árbol ordenado con raíz)

r:= raíz de T

for cada hijo c de r de izquierda a derecha

begin

 T(c) := subárbol de raíz c

 ordenfinal (T (c))

end

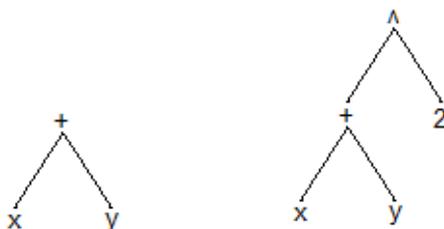
listar r

3.2. RECORRIDO EN ÁRBOLES ETIQUETADOS

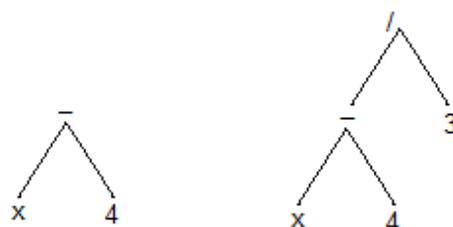
Se pueden representar expresiones complejas, tales como fórmulas proposicionales, combinaciones de conjuntos y expresiones aritméticas mediante árboles ordenados con raíz. Por ejemplo, se puede representar una expresión aritmética que implique las operaciones: suma, resta, producto, cociente y potenciación; en este caso, los vértices internos del árbol representan operaciones mientras que las hojas representan variables o números.

Por ejemplo ¿Cuál es el árbol ordenado con raíz que representa la siguiente expresión $(x + y)^2 + \frac{x-4}{3}$?

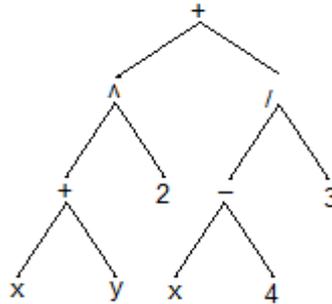
El árbol binario completo para esta expresión se puede construir de abajo hacia arriba. Primero se construye un subárbol para la expresión $(x + y)$ que posteriormente se unirá a otro subárbol mayor que representa la expresión $(x + y)^2$.



También se construye un subárbol para $(x - 4)$ que luego se incorporará a otro subárbol mayor que representa a $\frac{x-4}{3}$



Finalmente, el subárbol que representa a $(x + y)^2$ y el subárbol que representa a $\frac{x-4}{3}$ se combinan para formar el árbol ordenado con raíz que representa a toda la expresión.



¿Cuál es el recorrido de este árbol en orden primero?

El recorrido en orden primero será: **+ ^ + x y 2 / - x 4 3**

En el recorrido en orden primero de una expresión, un operador binario, como por ejemplo + precede a sus dos operandos; por lo tanto, se puede evaluar una expresión de este tipo trabajando de derecha a izquierda. Cuando se encuentra un operador se realiza el cálculo correspondiente con los dos operandos que se encuentran inmediatamente a su derecha. Siempre que se realiza una operación, el resultado se considera como un operando.

Evaluar la expresión del recorrido en orden primero, para $x = 7$ e $y = 1$.

$$\begin{aligned}
 &+ \ ^ \ + \ x \ y \ 2 \ / \ - \ x \ 4 \ 3 \\
 &+ \ ^ \ + \ 7 \ 1 \ 2 \ / \ - \ 7 \ 4 \ 3 \\
 &+ \ ^ \ + \ 7 \ 1 \ 2 \ / \ \underline{3 \ 3} \\
 &+ \ ^ \ \underline{+ \ 7 \ 1} \ 2 \ 1 \\
 &+ \ ^ \ \underline{8 \ 2} \ 1 \\
 &\underline{+ \ 64 \ 1} \\
 &65
 \end{aligned}$$

¿Cuál es el recorrido del árbol anterior pero en orden final?

El recorrido en orden final será: $x y + 2 ^ x 4 - 3 / +$

En el recorrido en orden final de una expresión, los operadores binarios van detrás de sus dos operandos. Por lo tanto, se puede evaluar una expresión de este tipo trabajando de izquierda a derecha, realizando las operaciones siempre que un operador siga a dos operandos. Tras realizar la operación, el resultado se convierte en un nuevo operando.

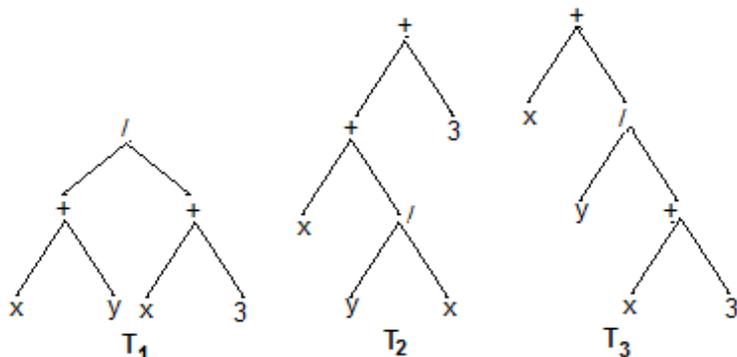
Evaluar la expresión del recorrido en orden final, para $x = 7$ e $y = 1$.

$$\begin{aligned}
 &x y + 2 ^ x 4 - 3 / + \\
 &\underline{7 \ 1} + 2 ^ \underline{7 \ 4} - 3 / + \\
 &\underline{8 \ 2} ^ \underline{3 \ 3} / + \\
 &\underline{64 \ 1} + \\
 &65
 \end{aligned}$$

El recorrido en orden segundo de un árbol binario que representa una expresión reproduce la expresión original con los elementos y las operaciones en el orden en que aparecían inicialmente, excepto para los operadores unarios que aparecen inmediatamente después de sus operandos.

Por ejemplo, sean las expresiones $E_1 = \frac{x+y}{x+3}$, $E_2 = (x + \frac{y}{x}) + 3$, $E_3 = x + \frac{y}{x+3}$

Los árboles T_1 , T_2 y T_3 que representan, respectivamente, a estas expresiones son los siguientes.



Compruébese que el recorrido en orden segundo para los tres árboles produce exactamente la misma expresión: $x + y / x + 3$. Para evitar la ambigüedad, es necesario incluir paréntesis en el recorrido en orden segundo siempre que se encuentre una operación.

De esta manera, la expresión que produce el recorrido en orden segundo del árbol T_1 es $(x + y)/(x + 3)$, mientras que para T_2 es $(x + (y/x)) + 3$. Finalmente, para el árbol T_3 se obtiene la siguiente expresión: $x + (y/(x + 3))$.

Los árboles con raíz se pueden utilizar para representar otro tipo de expresiones, como las fórmulas proposicionales y las combinaciones entre conjuntos. En estos casos pueden aparecer operadores unarios como la negación, en el caso de las fórmulas. Para representar este tipo de operador y a su operando, se utiliza un vértice para el operador y un hijo para su argumento.

Ejemplo:

Obtener el árbol ordenado con raíz que representa a la siguiente fórmula proposicional $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

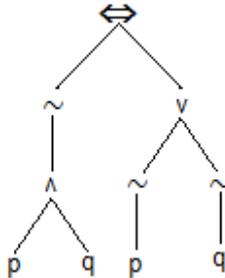
Primero se construye el subárbol que representa a la expresión $(p \wedge q)$ que se unirá a un subárbol mayor que representa a la expresión $\sim(p \wedge q)$.



Luego se construyen los subárboles de $\sim p$ y $\sim q$ (la negación es un operador unario) y se unen al subárbol que representa a la expresión $(\sim p \vee \sim q)$.



Finalmente, los dos subárboles obtenidos se utilizan en la construcción del árbol con raíz de la expresión.



El recorrido de este árbol en orden primero es $\Leftrightarrow \sim \wedge p q \vee \sim p \sim q$, mientras que el recorrido en orden final es: $p q \wedge \sim p \sim q \sim \vee \Leftrightarrow$. Los recorridos en orden primero y en orden final se utilizan frecuentemente en informática, ya que su escritura no es ambigua y se pueden evaluar fácilmente en una sola lectura. Estas expresiones son especialmente útiles en la construcción de compiladores.

4. ÁRBOLES GENERADORES

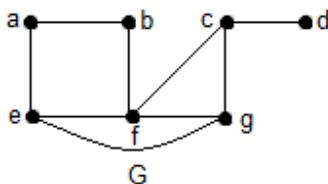
Algunas aplicaciones necesitan algoritmos para decidir cuándo un grafo tiene o no, una determinada propiedad, por ejemplo, la de ser o no conexo, o para encontrar todos los posibles caminos hamiltonianos o para contar el número de veces que aparece una cierta estructura. Por lo general, estas aplicaciones se basan en un árbol generador.

Definición:

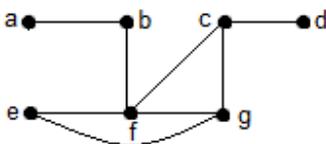
Sea G un grafo simple. Un árbol generador o abarcador de G es un subgrafo de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G .

Un grafo simple que admite un árbol generador es necesariamente conexo, ya que existe un camino en el árbol generador entre dos vértices cualesquiera. El recíproco también es válido, es decir, todo grafo simple conexo tiene un árbol generador.

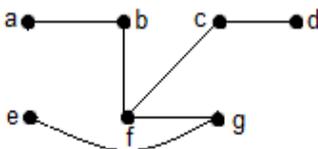
Ejemplo: obtener un árbol generador del siguiente grafo simple G .



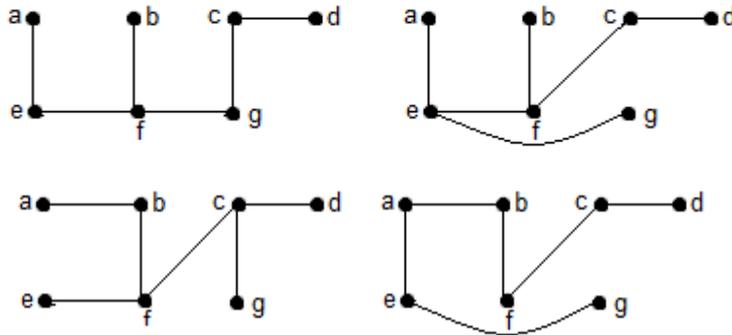
El grafo G es conexo, pero no es un árbol porque contiene ciclos. Quítese la arista $\{a, e\}$. De este modo se elimina un ciclo y el subgrafo resultante todavía es conexo y contiene todos los vértices de G .



Seguidamente quítese la arista $\{e, f\}$ para eliminar otro ciclo y quítese la arista $\{c, g\}$ para obtener un grafo simple y sin circuitos. Este último subgrafo es un árbol generador puesto que es un árbol que contiene todos los vértices de G .



Este no es el único árbol generador de G . Por ejemplo, cada uno de los siguientes árboles también es un árbol generador de G .



Existen muchas formas de construir árboles generadores. De hecho, para un mismo grafo existen diferentes árboles generadores; como afirma el teorema de Cayley “*un mismo grafo puede tener hasta n^{n-2} árboles generadores diferentes*” (n es el número de vértices del grafo).

En general, existen técnicas para contar el número de árboles generadores de un grafo cualquiera; sin embargo, las formas más comunes de construir árboles generadores tienen que ver con procedimientos de búsqueda, denominados búsqueda en profundidad y búsqueda en anchura.

4.1. PROCEDIMIENTO DE BÚSQUEDA EN PROFUNDIDAD

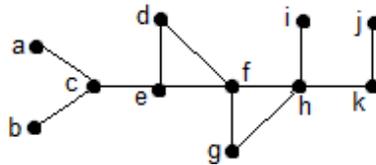
Partiendo de la raíz v del árbol, el procedimiento consiste en elegir como vértice activo la propia raíz y construir un árbol parcial W de la siguiente manera.

Denomínese x al vértice activo, siempre que el vértice activo tenga nuevos vértices adyacentes, elíjase uno de ellos, por ejemplo y . Añádase la arista $\{x, y\}$ a W . Avanzar a y , luego sustitúyase x por y como nuevo vértice activo. Si no hay nuevos vértices adyacentes a x , retrocédase al vértice que originalmente condujo hasta x . En algún momento del proceso se volverá de nuevo a v sin

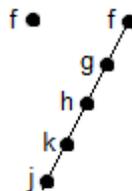
posibilidad de añadir nuevos vértices, entonces $W = T$. Con este procedimiento cada arista del árbol T es recorrida dos veces, una para avanzar y otra para retroceder.

Si v es un vértice del grafo G , y T es el árbol generador construido mediante el procedimiento de búsqueda en profundidad, entonces T es un árbol generador de G que contiene a v .

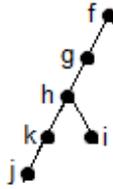
Ejemplo: Utilizar la búsqueda en profundidad para obtener un árbol generador del siguiente grafo G .



Elíjase de modo arbitrario un vértice inicial f que es el vértice activo. Como el vértice activo f tiene vértices adyacentes se elige g , (se podría haber elegido d) ahora g es el vértice activo que también tiene vértices adyacentes. Se elige h (vértice activo), a partir de allí se elige k (se podría haber elegido i), por último se elige a partir del vértice activo k , el vértice adyacente a él es j . Es decir que al árbol W se le agregaron, a partir de la raíz f , las siguientes aristas.

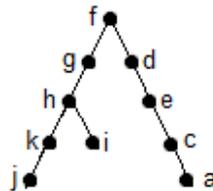


Se retrocede desde j hasta k (vértice activo) pero como este no tiene vértices adyacentes que no hayan sido utilizados se retrocede hasta h (vértice activo). A partir del vértice activo se puede elegir únicamente i , pues g ya fue utilizado. Es decir que se aumentó a W la arista $\{h, i\}$.

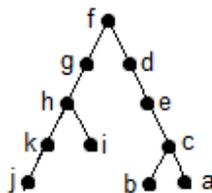


A partir del vértice activo i se retrocede hasta h (vértice activo) que no tiene vértices adyacentes que no hayan sido utilizados, se retrocede hasta g en donde ocurre lo mismo y finalmente el vértice activo es f .

A partir de f se puede elegir el vértice d , a partir de allí el vértice e y de allí el c , terminando en el vértice a (vértice activo). Es decir que al árbol W se le agregaron las siguientes aristas.

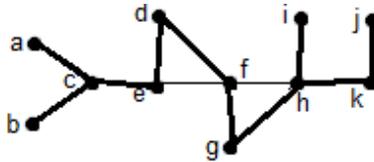


Finalmente, a partir del vértice activo a se retrocede hasta el vértice c desde donde se puede elegir únicamente b . Vale decir que se aumento al árbol, la arista $\{c, b\}$ y por lo tanto $W = T$. Es decir que el árbol generador para el grafo G es el siguiente.



Las aristas de un grafo seleccionadas en la búsqueda en profundidad se llaman *aristas del árbol*. Todas las demás aristas del grafo tienen que conectar un vértice con un antecesor o un descendiente de ese vértice en el árbol. A estas aristas se las llama *aristas de retroceso*. A continuación se destacan, con trazo

grueso, las aristas del árbol utilizadas por la búsqueda en profundidad del ejemplo anterior. Las aristas de retroceso son $\{e, f\}$ y $\{f, h\}$.



El pseudocódigo para la búsqueda en profundidad es el siguiente.

ALGORITMO: búsqueda en profundidad

procedure Busq_Prof (G: grafo conexo de vértices v_1, v_2, \dots, v_n)

T:= árbol que consta solo del vértice v_1

visita (v_1)

procedure visita (v : vértice de G)

for cada vértice w adyacente a v y que no esté en T

begin

 añadir el vértice w y la arista $\{v, w\}$ a T

 visita (w)

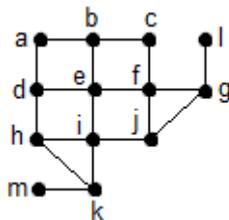
end

El algoritmo construye un árbol generador de un grafo G que tiene por conjunto de vértices a v_1, v_2, \dots, v_n . Primeramente, se selecciona el vértice v_1 como raíz, iniciando el proceso al asignar al árbol T justamente ese único vértice. En cada paso se añade un nuevo vértice al árbol T junto con una arista que lo conecta con un vértice de T y se explora desde ese nuevo vértice. Nótese que, al terminar el algoritmo, T no contiene ningún circuito, ya que no se añaden aristas a vértices que ya están en el árbol. Por otro lado, en todas las fases del proceso de construcción, T es un grafo conexo. Puesto que G es conexo, todo vértice de G se utiliza en alguna fase del algoritmo y se añade al árbol. De esto se concluye que T es un árbol generador de G.

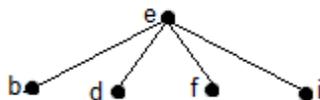
4.2. PROCEDIMIENTO DE BÚSQUEDA EN ANCHURA

También se puede obtener un árbol generador de un grafo simple mediante la *búsqueda en anchura o por niveles*. Se elige un vértice arbitrario como raíz y se añaden todas las aristas incidentes en ese vértice. Los nuevos vértices añadidos en esta fase forman los vértices del nivel 1 del árbol generador. Se ordenan los vértices del nivel 1 con un orden cualquiera. Para cada vértice del nivel 1, visitados en orden, se añaden todos los vértices incidentes con él, siempre que no formen un ciclo. Se ordenan los hijos de los vértices del nivel 1 con un orden cualquiera, generando así los vértices del nivel 2 del árbol. Se continúa de esta manera hasta que se hayan añadido todos los vértices al árbol. Este procedimiento tiene fin, ya que los grafos tienen un número finito de aristas. Lo que se obtiene es un árbol generador porque se obtuvo un subgrafo que es un árbol que contiene a todos los vértices del grafo.

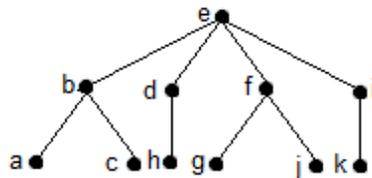
Ejemplo: utilizar la búsqueda en anchura para obtener un árbol generador del siguiente grafo G.



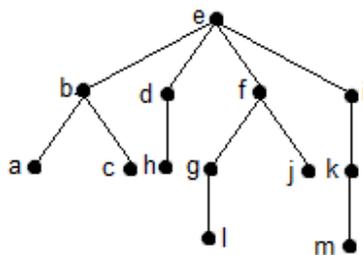
Se elige un vértice como raíz, e . Se añaden todas las aristas incidentes con todos los vértices adyacentes a e , esto es, las aristas $\{e, b\}, \{e, d\}, \{e, f\}, \{e, i\}$. Los cuatro vértices extremos de las aristas anteriores se añaden al nivel 1 del árbol.



Se añaden las aristas que conectan los vértices del nivel 1 con vértices que aún no están en el árbol. Por lo tanto, se añaden $\{b, a\}, \{b, c\}, \{d, h\}, \{f, g\}, \{f, j\}, \{i, k\}$. Los nuevos vértices a, c, h, j, g, k forman el nivel 2.



Se agregan las aristas que unen los vértices del nivel 2 con vértices adyacentes que no están aún en el árbol. Estas aristas son $\{g, l\}, \{k, m\}$. Los vértices l y m forman el nivel 3 del árbol.



En el algoritmo, en pseudocódigo para la búsqueda en anchura, se considera que los vértices del grafo G están ordenados y etiquetados por ejemplo de la siguiente manera: v_1, v_2, \dots, v_n .

Se utiliza el término *proceso* para describir el procedimiento de añadir nuevos vértices y las correspondientes aristas al árbol adyacentes al vértice procesado mientras no se generen ciclos.

ALGORITMO: búsqueda en anchura

procedure Busq_Anch (G : grafo conexo de vértices v_1, v_2, \dots, v_n)

T:= árbol que consta solo del vértice v_1

L:= lista vacía

poner v_1 en la lista L de los vértices no procesados

while L no esté vacía

begin

borrar el primer vértice v de L

for cada vértice w adyacente a v

if w no está en L y no está en T **then**

begin

añadir el vértice w al final de la lista L

añadir el vértice w y la arista $\{v, w\}$ a T

end

end

5. ÁRBOL GENERADOR MÍNIMO

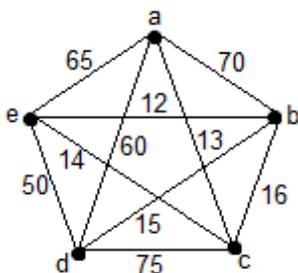
Existen situaciones, como puede ser la de conectar una serie de ciudades mediante un sistema de autopistas o conectar una serie de edificios mediante una red de telecomunicaciones, en donde el problema no es exactamente saber si existe un árbol generador, sino, más bien, saber cuál es el árbol generador más económico, siendo que las redes en ambos ejemplos tienen un determinado costo. Esto conduce a los conceptos de árbol ponderado y árbol generador mínimo.

Supóngase que una compañía planea construir una red de comunicaciones para conectar sus cinco centros informáticos. Cualquier pareja de estos centros debe estar enlazada mediante una línea telefónica. ¿Qué enlaces deberían realizarse para asegurar que hay un camino entre cualquier par de centros de modo que el costo total de la red sea el menor posible?

Se puede modelar este problema usando un grafo ponderado donde los vértices representan los centros informáticos, las aristas representan posibles

líneas de comunicaciones y los pesos de las aristas son los costos de construir las líneas asociadas a las aristas.

Está claro que para comunicar dos edificios no es necesario un enlace directo, pues se puede mandar un mensaje de uno a otro en forma indirecta. Por ejemplo, enviar un mensaje de a hacia b y de b hacia c , en lugar de enviarlo en forma directa de a hacia c .



Definición:

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si se asocia a cada arista de G un valor numérico, $w(e)$ que se denomina peso de la arista e , a la función $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ se la denomina función peso; entonces se dice que G y w constituyen un grafo ponderado.

Claramente, se puede asociar esta definición a la red de telecomunicaciones del problema que se viene analizando. Aquí los pesos de las aristas vienen dados por sus respectivos costos. El objetivo es conseguir que ese costo sea el mínimo, lo que corresponde a un árbol generador T de G cuyo peso $w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$ sea el menor posible.

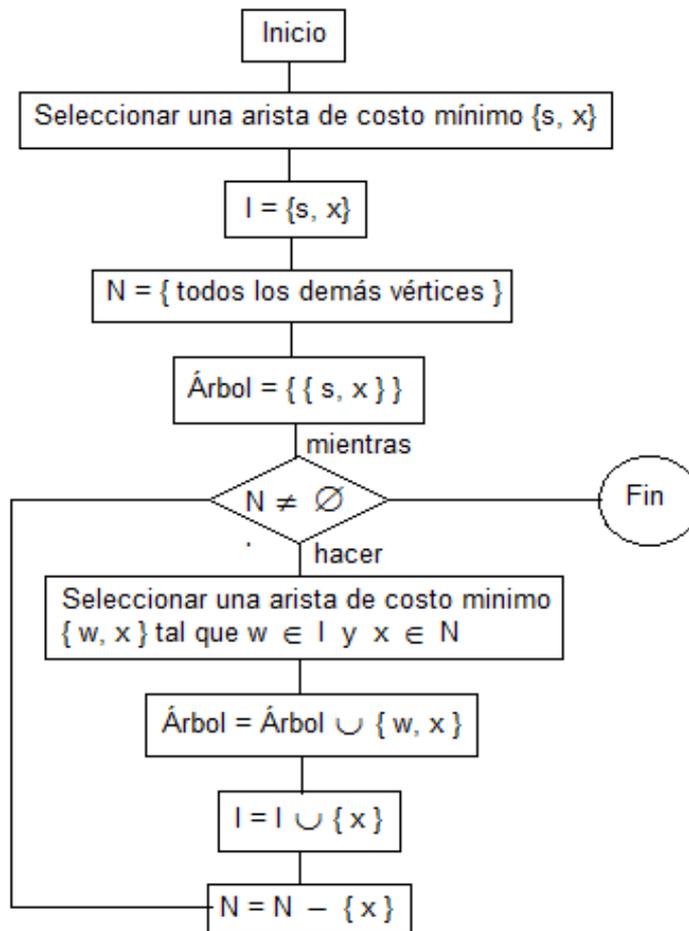
Definición:

Un árbol generador mínimo, de un grafo ponderado, es un árbol generador tal que la suma de los pesos de sus aristas es la mínima posible de entre todos los árboles generadores.

Existen dos algoritmos que conducen de una manera directa a un árbol generador mínimo de un grafo G de n vértices.

El primer algoritmo fue propuesto por Robert Prim en 1957, aunque las ideas básicas son anteriores. En este método, los vértices se dividen en dos conjuntos: vértices integrados (I) –que son los que forman parte del árbol generador mínimo– y los vértices no integrados (N). El conjunto I contiene todas las aristas que se van integrando en cada iteración. En cada paso se agrega un vértice en el conjunto I mientras que el conjunto N es disminuido en uno.

Se puede expresar el *Algoritmo de Prim* mediante el siguiente diagrama de flujo.



Nótese que la elección de una arista, para añadirla en cualquiera de los pasos del algoritmo, no está determinada cuando hay más de una con el mismo peso satisfaciendo los criterios. Por lo tanto, si en el momento de seleccionar la arista de peso mínimo se opta por otra de igual peso, entonces el árbol generador mínimo es diferente.

El segundo algoritmo para construir un árbol generador de peso mínimo fue descubierto por Joseph Kruskal, en 1956; aunque las ideas que se utiliza fueron descritas con antelación a esa fecha.

Para ejecutar el *Algoritmo de Kruskal* se elige una arista del grafo de entre las que tienen menor peso.

Se añaden paulatinamente las aristas con menor peso siempre que estas no formen un ciclo con otras ya incorporadas. El proceso termina cuando se han seleccionado $n - 1$ aristas.

El pseudocódigo de este algoritmo es el siguiente.

ALGORITMO: Algoritmo de Kruskal

procedure Kruskal (G: grafo ponderado, conexo y no dirigido de n vértices)

T:= grafo vacío

for i:= 1 **to** $n - 1$

begin

 e:= una arista de peso mínimo de G que no forme un ciclo cuando se
 añada al grafo T

 T:= T con e añadida

end

Tanto el Algoritmo de Prim como el de Kruskal son algoritmos voraces⁷, pudiéndose demostrar que ambos proporcionan un árbol generador de peso mínimo para cualquier grafo ponderado conexo.

Otra cuestión que comparten ambos algoritmos es el hecho de que si las aristas no están ordenadas, hay más de una posible elección para las aristas que se añaden en los distintos pasos de los algoritmos.

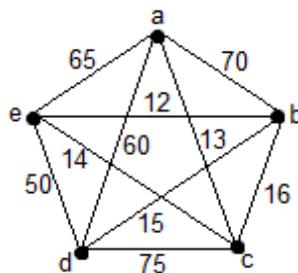
Adviértase que la diferencia entre los algoritmos es la siguiente: en el Algoritmo de Prim, las aristas de peso mínimo elegidas deben ser incidentes con algunos de los vértices del árbol ya construido y no deben formar un ciclo

⁷ Un algoritmo voraz es un procedimiento que realiza una elección óptima en cada uno de sus pasos. El hecho de que se optimice en cada paso no garantiza que la solución final sea una solución óptima. Sin embargo, esta situación no ocurre para estos dos algoritmos.

con las ya elegidas; en el Algoritmo de Kruskal, en cambio, las aristas de peso mínimo que se eligen no pueden formar un ciclo con las ya elegidas, pero no deben ser necesariamente incidentes con vértices del árbol.

Ya se estudiaron los conceptos necesarios para resolver el problema planteado al iniciar este apartado.

Ejemplo: encontrar los árboles generadores mínimos que se obtienen usando los algoritmos de Prim y de Kruskal en el siguiente grafo ponderado.



En esencia, el algoritmo de Prim consiste en repetir el siguiente paso hasta que el conjunto *Árbol* tenga $n - 1$ aristas (n es el número de vértices del grafo dado), añadir a *Árbol* la arista de menor peso entre un vértice de *Árbol* y un vértice que no esté en él.

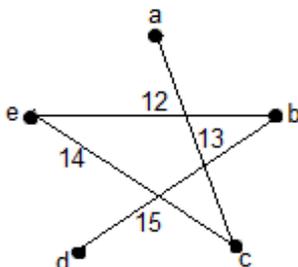
Se empieza por la arista de menor peso, en este caso, $\text{Árbol} = \{\{b, e\}\}$. Se añade a *Árbol* la arista $\{e, c\}$ de peso 14, con lo que $\text{Árbol} = \{\{b, e\}, \{e, c\}\}$ de peso 26. En el siguiente paso se añade la arista $\{c, a\}$; con lo que $\text{Árbol} = \{\{b, e\}, \{e, c\}, \{c, a\}\}$ de peso 39. Finalmente, se añade la arista $\{b, d\}$, con lo que termina el algoritmo, pues, se añadieron cuatro aristas sin formar un ciclo. Entonces $\text{Árbol} = \{\{b, e\}, \{e, c\}, \{c, a\}, \{b, d\}\}$ de peso 54.

Básicamente, el algoritmo de Kruskal consiste en repetir el siguiente paso hasta que el conjunto *T* tenga $n - 1$ aristas: añadir a *T* la arista con menor peso que no forme un ciclo con las aristas que ya están en *T*.

Se inicia con la arista de menor peso, en este caso $\{b, e\}$, por lo tanto $T = \{\{b, e\}\}$ de peso 12. Se añade a T la arista de menor peso, en este caso $\{a, c\}$. Ahora se tiene $T = \{\{b, e\}, \{a, c\}\}$ de peso 25. En el siguiente paso se añade $\{c, e\}$ con lo que el conjunto $T = \{\{b, e\}, \{a, c\}, \{c, e\}\}$ de peso 39. Finalmente, se añade la arista $\{b, d\}$ con lo que se añadieron cuatro aristas a T sin formar un ciclo.

Entonces $T = \{\{b, e\}, \{e, c\}, \{c, a\}, \{b, d\}\}$ de peso 54.

El árbol generador mínimo obtenido por los dos algoritmos es el siguiente.



Nótese que en el Algoritmo de Prim se parte de un árbol y se van obteniendo árboles en las sucesivas iteraciones. Sin embargo, en el de Kruskal no es necesariamente así, se van obteniendo distintos bloques –que no tienen por qué ser árboles– ya que solo al final se puede asegurar que se obtiene un árbol. Nuevamente, en ambos algoritmos, cuando haya varias opciones para añadir nuevas aristas, cualquiera de las opciones puede ser elegida. Aunque es inmediato comprobar que ambos algoritmos conducen a árboles generadores, es algo más complicado demostrar que estos son, además, mínimos.

6. APLICACIONES DE LOS ÁRBOLES

6.1. CÓDIGOS INSTANTÁNEOS

Considérese el siguiente problema. Codificar las letras de un alfabeto mediante cadenas de bits –sin distinguir entre mayúsculas y minúsculas– de

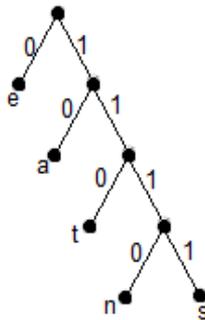
manera tal de maximizar el ahorro de espacio en la memoria y minimizar el tiempo de transmisión de datos.

Una solución es codificar las letras con cadenas de bits de longitudes variables, es decir, las letras que aparezcan con mayor frecuencia deberán codificarse utilizando cadenas de bits más cortas, mientras que las letras menos frecuentes se codificarán mediante cadenas más largas.

Cuando se codifica con cadenas de longitud variables se debe establecer algún método para determinar cuándo comienza y cuándo termina cada cadena de bits. Por ejemplo, si p se codificara por 0, e por 1 y s por 01, entonces la cadena 0101 podría corresponder a pes, spe, ss o pepe.

Una manera de asegurar que ninguna cadena de bits se corresponde con más de una secuencia de caracteres consiste en codificar las letras de manera que la cadena de bits asociada a una letra nunca aparezca al principio de la cadena de bits de otra letra. Los códigos con esta propiedad se llaman códigos instantáneos. Por ejemplo, la codificación de p como 0, e como 10 y ss como 11 es un código prefijo. Toda palabra puede reconstruirse a partir de la única cadena de bits que codifica los caracteres que le corresponde. Por ejemplo, la cadena 10110 es la codificación de *esp*, nótese que el 1 inicial no representa un carácter pero 10 representa la letra e (y no puede ser el inicio de la cadena de bits de ninguna otra letra). Por lo tanto, el siguiente 1 no representa un carácter, sino que 11 representa la letra s. El bit final, 0, representa la letra p.

Un código instantáneo puede representarse utilizando un árbol binario donde los caracteres son las etiquetas de las hojas del árbol. Las aristas del árbol están etiquetadas de modo que a la arista que va al hijo izquierdo se le asigna 0 y a la que va al hijo derecho se le asigna 1. La cadena de bits que codifica cada carácter es la sucesión de las etiquetas de las aristas del único camino de la raíz a la hoja que tiene a este carácter como etiqueta. Por ejemplo, en el siguiente árbol se codificaron los caracteres e, a, t, n, s.



Los mismos árboles que representan códigos instantáneos se pueden utilizar para decodificar cadenas de bits. Por ejemplo, considérese la palabra codificada, según el árbol anterior, como 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0. Esta cadena de bits se puede decodificar comenzando por la raíz, utilizando la sucesión de bits para formar un camino desde la raíz que termina al alcanzar una hoja. Cada bit con valor 0 hace que se descienda por la arista que lleva al hijo izquierdo del último vértice del camino y cada 1 se corresponde con el hijo derecho de dicho vértice. Por lo tanto, la subcadena 1 1 1 1 se corresponde con la letra s. Comenzando con el quinto bit, se alcanza la hoja luego de ir a la derecha una vez y luego a la izquierda, o sea que la cadena 10 se corresponde con el carácter a. Se inicia, nuevamente, desde la raíz y a partir del séptimo bit, llegándose a una hoja luego de usar la subcadena 1 1 1 0 que se corresponde con el carácter n. Finalmente, el resto de la cadena es 10 que codifica el carácter a. En consecuencia, la palabra codificada es *sana*.

Se puede construir un código instantáneo a partir de cualquier árbol binario donde la arista izquierda de cada vértice interno esté etiquetada con un 0 y la arista derecha con un 1 y en el que las hojas estén etiquetadas con caracteres. Los caracteres se codifican mediante las cadenas de bits construidas, utilizando las etiquetas de las aristas que hay en el único camino desde la raíz hasta las hojas.

Códigos de Huffman. David Huffman en un artículo que escribió en el año 1951, cuando aún era estudiante de doctorado, desarrolló un algoritmo que toma como datos de entrada las frecuencias (probabilidad de aparición) de símbolos de una cadena y devuelve un código instantáneo que codifica la cadena utilizando la menor cantidad de bits, de entre todos los posibles códigos instantáneos binarios para este conjunto de símbolos. Este algoritmo conocido como *codificación de Huffman* supone que ya se sabe cuántas veces aparece cada símbolo en la cadena, así que se puede calcular la frecuencia de cada símbolo dividiendo el número de apariciones del símbolo entre la longitud de la cadena. La codificación de Huffman es un algoritmo esencial en la comprensión de datos, que es el área de conocimiento que se dedica a reducir el número de bits necesarios para representar la información. También se utiliza para comprimir cadenas de bits que representan textos, archivos de audios y de imágenes.

6.2. ÁRBOLES DE JUEGO

Los árboles se pueden emplear para analizar ciertos tipos de juegos como ser: ta-te-ti, nim, damas o ajedrez. En estos juegos, los jugadores realizan sus movimientos por turnos. Cada jugador conoce los movimientos efectuados por el contrario y no hay ningún componente de azar en el juego. Estos juegos se modelan mediante *árboles de juegos*, en donde los vértices representan los estados o posiciones en el desarrollo del juego y las aristas representan los movimientos permitidos entre dos estados cualesquiera.

La raíz representa el estado inicial, y usualmente se conviene en representar los vértices de los niveles impares por rectángulos y los de los niveles pares por círculos. Cuando el juego está en una posición representada por un vértice de nivel impar, es turno del primer jugador, mientras que si está en una de nivel par es el turno del segundo jugador.

Las hojas de un árbol de juegos representan las posiciones finales de un juego. Se asigna un valor a cada hoja indicando la puntuación que obtiene el primer jugador, si el juego termina en la posición representada por esa hoja.

Para los juegos que son ganador-perdedor, se etiqueta un vértice terminal representado mediante un círculo con un 1 para indicar una partida ganada por el primer jugador, y se etiqueta un vértice terminal representado por un rectángulo con un -1 para indicar que gana el segundo jugador. Nótese que, para este tipo de juego, la asignación de valores a los vértices terminales significa que cuanto mayor sea el valor, tanto mejor será el resultado final del juego para el primer jugador.

El juego *nim*. En una versión del juego *nim*, al inicio de la partida hay un cierto número de fichas distribuidas en filas. Dos jugadores hacen sus movimientos por turnos; un movimiento válido consiste en retirar una o más fichas de una de las filas, (sin quitar ninguna de las fichas restantes). Un jugador pierde si no puede realizar ningún movimiento válido. (Otro modo de ver este juego es que el jugador que retira la última ficha pierde, puesto que la posición sin fichas no está permitida).

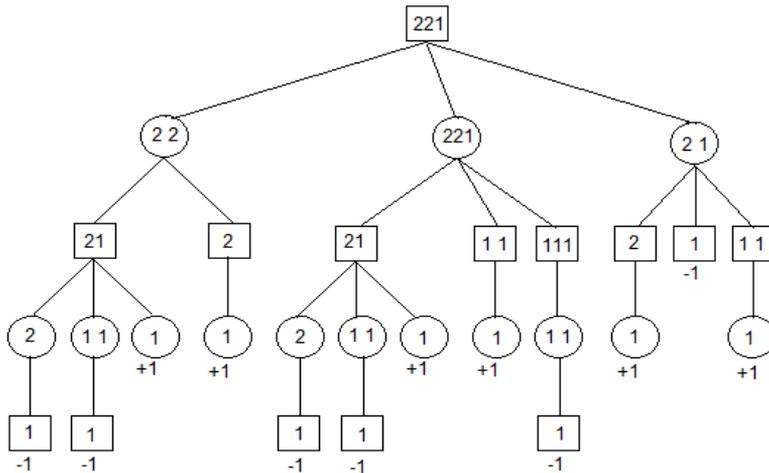
El árbol que se muestra a continuación representa esta versión del juego que comienza con una posición inicial de tres filas con dos, dos y una ficha respectivamente. Se representa cada posición con una lista no ordenada del número de fichas en las distintas filas (el orden de las fichas es irrelevante).

El movimiento inicial del primer jugador puede llevar a tres posiciones posibles ya que puede retirar a lo sumo dos fichas.

Si retira una ficha de la fila que tiene una sola ficha, deja dos filas con dos fichas cada una; si retira una ficha de alguna de las dos filas que tienen dos fichas, deja una fila con dos fichas y dos filas con una ficha cada una; de retirar dos fichas de alguna de las dos filas posibles, deja dos filas con una y dos fichas, respectivamente. Cuando queda una fila con una ficha, no es posible

realizar ningún movimiento válido, por lo tanto esas posiciones son terminales.

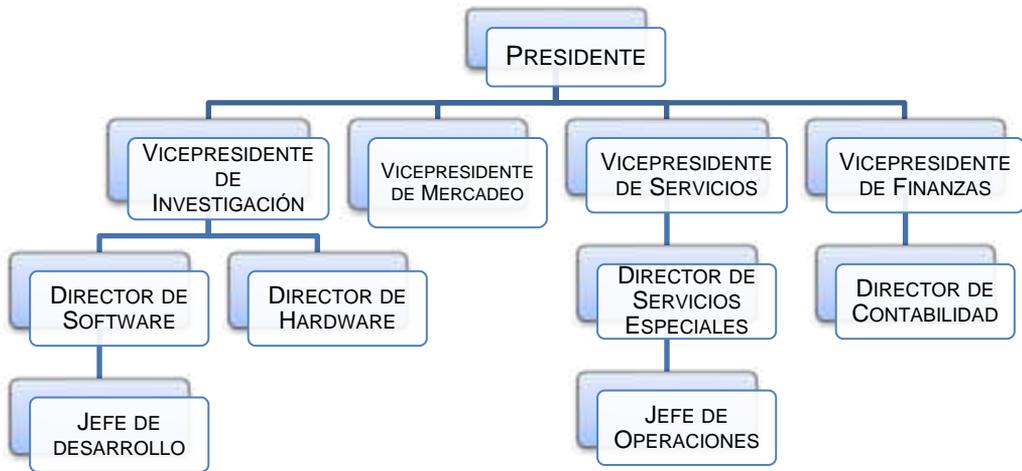
Puesto que el juego del *nim* es del tipo ganador-perdedor, se etiquetan los vértices terminales con +1 cuando se representa que el primer jugador gana y con -1 cuando lo hace el segundo.



6.3. ÁRBOLES COMO MODELOS

Representación de organizaciones: la estructura de una organización se puede modelar utilizando un árbol con raíz. Cada vértice de este árbol indica un puesto en la organización. Una arista de uno de los vértices a otro indica que la persona representada por el vértice inicial es jefe (directo) de la persona representada por el vértice final. El grafo mostrado a continuación es un ejemplo de árbol de este tipo.

En la organización representada por este árbol, el vicepresidente de servicios es jefe directo del director de servicios especiales, pero también del jefe de operaciones. El presidente de la organización trabaja directamente con los cuatro vicepresidentes.

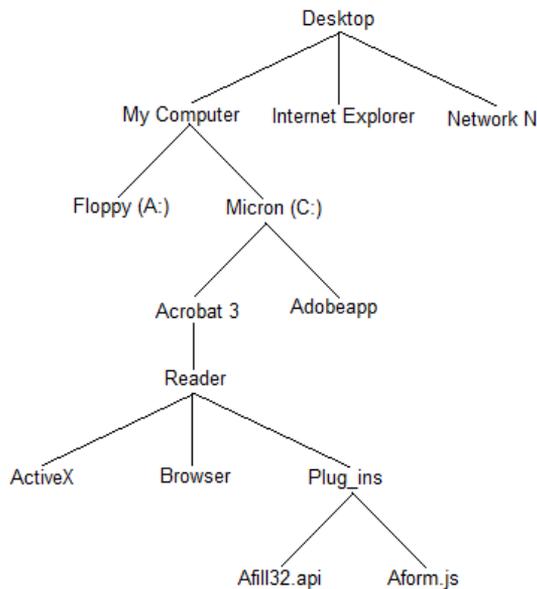
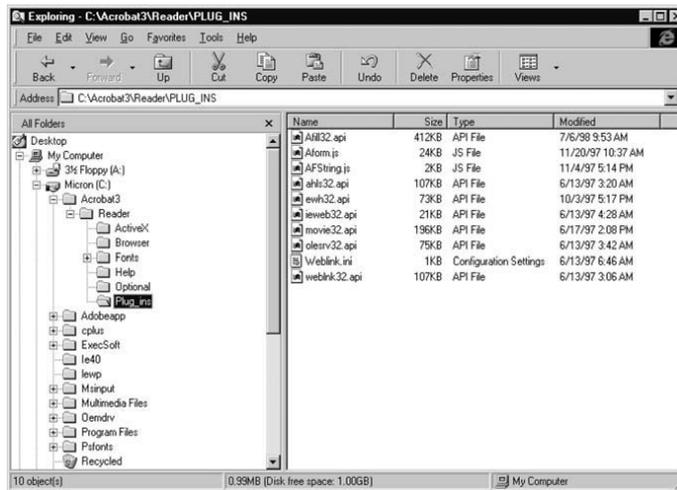


Sistema de archivos de computadoras: en la memoria de una computadora, los archivos se organizan en directorios. Un directorio puede contener tanto subdirectorios como archivos. La raíz de un directorio contiene el sistema de archivo completo. De esta manera, un sistema de archivos puede representarse mediante un árbol con raíz, donde la raíz representa el directorio raíz, los vértices internos representan los subdirectorios y las hojas representan los archivos comunes o subdirectorios vacíos.

A continuación, se muestra el explorador de Windows con el despliegue de carpetas, a la izquierda, y los archivos, a la derecha, en una computadora en particular, y luego la misma estructura como un árbol con raíz.

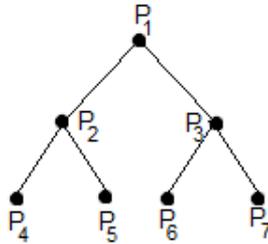
La raíz se llama Desktop. Por debajo de ella están My Computer, Internet Explorer y otros (My Computer es lo único desplegado). Abajo de My Computer están Floppy (A:), Micron (C:) y otros que no se muestran.

Abajo de Plug_ins, que está resaltado, están los archivos Afill32.api, Aform.js y otros, que aparecen a la derecha en la primera figura.



Procesadores en paralelos conectados en árbol: una red conectada en árbol es otra manera de conectar computadoras. El grafo que representa este tipo de red es un árbol binario completo. Una red de este tipo conecta $n = 2^k - 1$ procesadores, donde k es un entero positivo. Un procesador representado por un vértice v , que no es raíz o una hoja, tiene tres conexiones

bidireccionales –una al procesador representado por el padre de v y dos a los procesadores representados por los hijos de v –. A continuación se muestra una red conectada en árbol con siete procesadores.

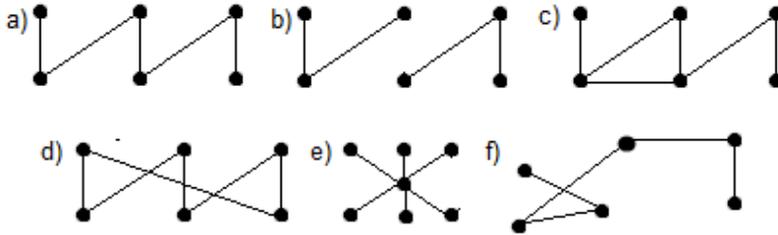


Mediante un sencillo ejemplo se ilustrará cómo se puede usar una red conectada en árbol para el cálculo en paralelo. Se muestra, en particular, cómo se utilizan los procesadores del árbol anterior para sumar ocho números en tres pasos. En el primer paso se suma x_1 y x_2 con P_4 ; x_3 y x_4 con P_5 ; x_5 y x_6 con P_6 y x_7 y x_8 con P_7 . En el segundo paso se suma $x_1 + x_2$ y $x_3 + x_4$ con P_2 y $x_5 + x_6$ y $x_7 + x_8$ con P_3 , finalmente en el tercer paso se suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ y $x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ con P_1 .

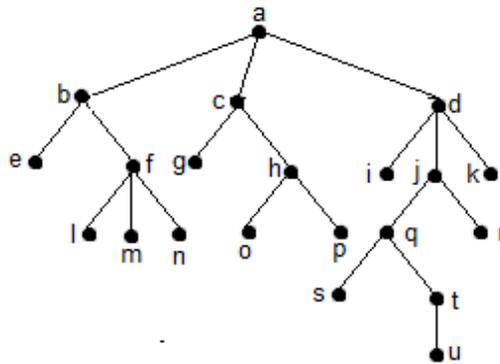
Los tres pasos utilizados para sumar ocho números mejoran los siete pasos necesarios para sumarlos en serie, donde cada paso consiste en sumar un número con la suma acumulada de dos números situados previamente en la lista.

TRABAJO PRÁCTICO: ÁRBOLES

1. ¿Cuáles de los siguientes grafos son árboles? Justificar la respuesta.



2. Dado el siguiente árbol con raíz, responder:



- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) ¿Cuál es el vértice raíz? | e) ¿Qué vértice es padre de h? |
| b) ¿Cuáles son los vértices internos? | f) ¿Qué vértices son hermanos de o? |
| c) ¿Qué vértices son hojas? | g) ¿Cuáles son los antecesores de m? |
| d) ¿Qué vértices son hijos de j? | h) ¿Cuáles son los descendientes de b? |

3. Para el árbol con raíz del inciso anterior:

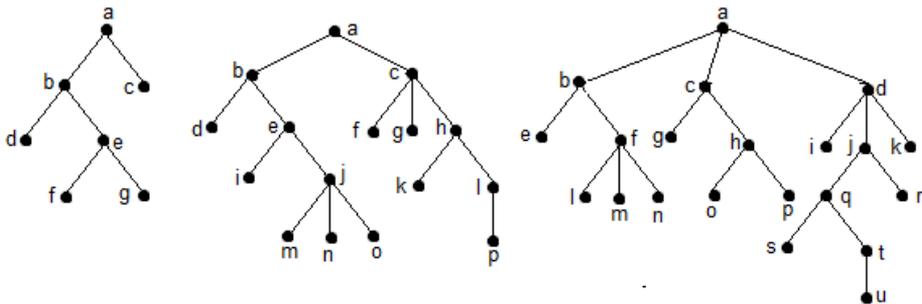
- ¿Es un árbol m-ario completo para algún entero positivo m?
- ¿Cuál es el nivel de cada vértice?
- Dibujar el subárbol con raíz en d, f y q.

- ¿Cuántas aristas tiene un árbol con 10.000 vértices?
 - ¿Cuántos vértices tiene un árbol 5-ario completo con 100 vértices internos?

c) ¿Cuántos vértices tiene un árbol binario completo con 1.000 vértices internos?

d) ¿Cuántas hojas tiene un árbol ternario completo con 100 vértices?

5. Para cada uno de los siguientes árboles con raíz, ordenados, determinar el orden en que se visitan sus vértices si se realiza el recorrido en orden primero, en orden segundo y en orden final.



6. a) Representar las siguientes fórmulas proposicionales mediante árboles ordenados con raíz.

i) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ ii) $(\sim p \wedge (q \Leftrightarrow \sim p)) \vee \sim q$

b) Representar $(A \cap B) - (A \cup (B - A))$ mediante un árbol ordenado con raíz.

7. Dadas las siguientes expresiones, determinar

i) $\frac{\frac{a}{b-c} + d.c}{c - \frac{d+a}{b}} =$

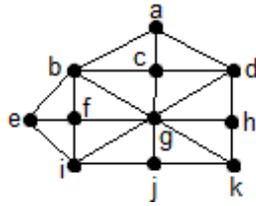
ii) $\frac{\frac{(a-b.c).d}{e}}{\frac{(b+a).c.e}{b} + f} =$

iii) $\frac{c+d}{a} - \frac{c.a-b.c}{\frac{e}{c+d}} =$

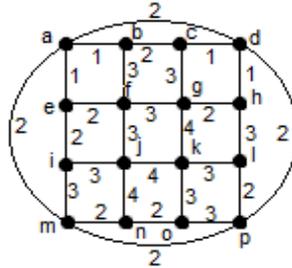
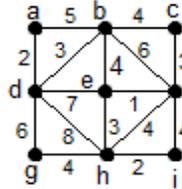
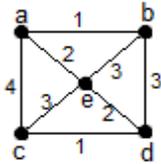
iv) $\frac{\frac{(e+d).a+c.a-e}{b+f}}{\frac{a+b}{c} - \frac{adf}{e}} =$

a) El árbol binario completo que representa la expresión.

b) El recorrido en orden primero, segundo y final.



11. Utilizar el algoritmo de Prim y el de Kruskal para determinar un árbol generador mínimo para cada uno de los siguientes grafos ponderados.



AUTOEVALUACIÓN: ÁRBOLES

1. Responder Verdadero o Falso, NO justificar la respuesta.

a) La altura de un árbol con raíz es el número máximo de nivel que ocurre.

b) En un árbol ternario completo, cada vértice tiene exactamente tres hijos.

c) Para recorrer un árbol en orden último, se debe recorrer el padre, el hijo izquierdo y finalmente el hijo derecho.

d) Un árbol generador de un grafo simple G, es un subgrafo de G que es un árbol y que contiene todos los vértices de G.

e) Un grafo simple G puede tener más de un árbol generador.

2. Completar con la respuesta correcta.

a) El nivel de un vértice v es.....

b) El subárbol con raíz en el vértice x, de un árbol con raíz es el.....

c) La secuencia en la que se puede resumir el recorrido de un árbol en orden primero es la siguiente.....

d) El árbol binario completo que representa la expresión $(x - y)^3 - \frac{x \cdot y}{2}$ es el siguiente.....

e) Si el recorrido en orden final de un árbol es a b + 2 ^ a 3 - 5 / + , entonces el árbol es el siguiente.....

3. Escribir en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) Un árbol es un grafo

A) No dirigido y conexo

B) Conexo y acíclico

C) Simple y conexo

D) Simple y acíclico

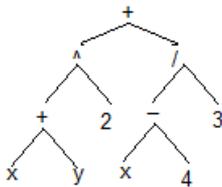
b) La cantidad, n , de vértices de un árbol m -ario completo con i vértices internos es

- A) $n = m \cdot i + 1$ B) $n = m \cdot i - 1$ C) $n = m^i + 1$ D) $n = \frac{m}{i} + 1$

c) Si n es el n° de vértices de un árbol, i el n° de vértices internos y l el n° de hojas, entonces se cumple que:

- A) $l = n + i$ B) $n = l + i$ C) $i = n + l$ D) $n = l^i$

d) Sea el árbol



di) El recorrido en orden primero es

- A) $+ \wedge y x 2 / - x 4 3$ B) $+ \wedge x y 2 / - x 4 3$
 C) $+ \wedge x y 2 / - 3 4 x$ D) $+ \wedge x y 2 / - x 4 3$

eii) El recorrido en orden último es

- A) $y x + 2 \wedge x 4 - 3 / +$ B) $x y + 2 \wedge 4 x - 3 / +$
 C) $x y + 2 \wedge x 4 - 3 / +$ D) $x y + 2 \wedge x 4 - 3 + /$

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN: ÁRBOLES

Para cada uno de los siguientes enunciados, escribir el programa o subrutina solicitado.

- 1.** Implementar el Algoritmo para recorrer un árbol en orden primero.
- 2.** Implementar el Algoritmo para recorrer un árbol en orden segundo.
- 3.** Implementar el Algoritmo para recorrer un árbol en orden final.
- 4.** Implementar el Algoritmo *búsqueda en profundidad* para construir un árbol generador a partir de un grafo G.
- 5.** Implementar el Algoritmo *búsqueda en anchura* para construir un árbol generador a partir de un grafo G.
- 6.** Implementar el Algoritmo de Prim para construir un árbol generador mínimo a partir de un grafo G.
- 7.** Implementar el Algoritmo de Kruskal para construir un árbol generador mínimo a partir de un grafo G.
- 8.** Implementar un algoritmo para la Codificación de Huffman.
- 9.** Escribir un programa que permita evaluar una expresión aritmética dada en orden primero.
- 10.** Escribir un programa que permita evaluar una expresión aritmética dada en orden final.

BIBLIOGRAFÍA

Disset, L. (2004). *Apuntes de Clases – Matemática Discreta*. Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile.

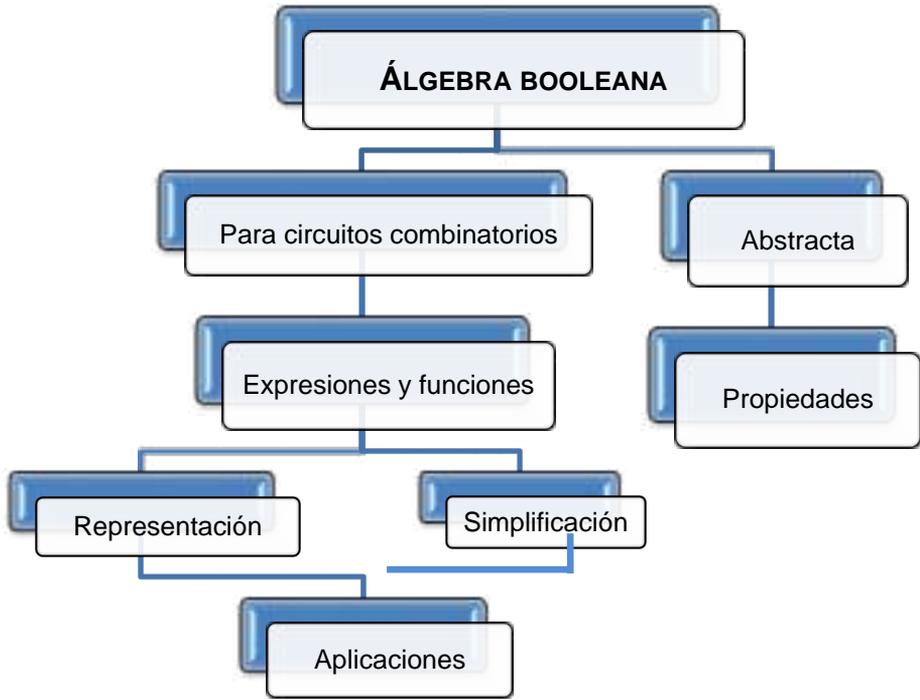
Jiménez Murillo, J. (2011). *Matemática para la computación*. (Primera edición). México: Alfa Omega Grupo editor S. A.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. (Sexta edición). (Traducción de Gonzales Osuna, M.). México: Pearson Educación Prentice Hall.

Kolman, B.; Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de Matemáticas discretas para la Computación*. (Tercera edición). (Traducción de Palmas Velasco, O.). México: Prentice – Hall Hispanoamericana S. A.

Rosen, K. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (Quinta edición). (Traducción: Pérez Morales y otros). España: Mc Graw Hill.

ÁLGEBRA DE BOOLE



OBJETIVOS

- ✓ Reconocer la importancia del álgebra de Boole como unificación de la teoría de conjuntos y la lógica proposicional.
- ✓ Saber determinar si un conjunto con operaciones internas es o no un álgebra booleana.
- ✓ Conocer el álgebra de Boole de las funciones booleanas.
- ✓ Simplificar funciones booleanas usando teoremas del álgebra de Boole.
- ✓ Simplificar funciones booleanas por medio de mapas de Karnaugh.

Álgebra de Boole

1. INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones la importancia de un acontecimiento histórico no se mide por su difusión, sino por las consecuencias que este trae. Esto es lo que ocurrió en Lógica con el álgebra de Boole. El álgebra booleana fue desarrollada por George Boole en su libro *An Investigation of the Laws of Thought (Una Investigación de las Leyes del Pensamiento)* publicado en 1854, allí muestra las herramientas para que las proposiciones lógicas puedan ser manipuladas en forma algebraica.

El logro fundamental de George Boole fue introducir una estructura algebraica –el álgebra de Boole– definida para un conjunto de elementos junto con dos operaciones que satisfacen ciertas propiedades, logrando con esto unificar la teoría de conjuntos y el cálculo proposicional puesto que ambas teorías se rigen por dicha estructura algebraica.

Debido al carácter abstracto de sus principios, el álgebra booleana no tuvo aplicación directa sino hasta 1938, año en el cual la compañía de teléfonos Bell de Estados Unidos, la utilizó para realizar un análisis de los circuitos de su red telefónica. En ese mismo año, Claude Shannon creó la llamada álgebra de conmutación para representar las propiedades de conmutación eléctrica biestables, demostrando con esto que el álgebra booleana se adapta perfectamente al diseño y representación de circuitos lógicos de control basados en relés e interruptores.

Los circuitos lógicos de control tienen una gran importancia, ya que las computadoras, los sistemas telefónicos, los robots y cualquier operación automatizada en una empresa, son algunos de los ejemplos de la aplicación de estos y del álgebra booleana.

2. ÁLGEBRAS BOOLEANAS

La teoría de conjunto y el cálculo proposicional en lógica satisfacen leyes similares. Estas leyes sirven para definir una estructura matemática abstracta denominada álgebra booleana. Una vez que se demuestra que una estructura concreta es un álgebra de Boole, todos los resultados enunciados para un álgebra de Boole genérica serán válidos en esa estructura particular.

Las álgebras booleanas se pueden definir de distintas maneras, la más común es especificar las propiedades que deben satisfacer las operaciones.

Definición:

Un álgebra booleana B , consta de un conjunto S , dos elementos distintos 0 y 1 , los operadores binarios $+$ y \cdot en S y un operador unario $\bar{}$ de modo tal que para cualesquiera elementos x, y, z de S se satisfacen las siguientes propiedades.

$$\text{Leyes asociativas} \begin{cases} (x + y) + z = x + (y + z) \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \end{cases}$$

$$\text{Leyes conmutativas} \begin{cases} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{cases}$$

$$\text{Leyes distributivas} \begin{cases} x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \end{cases}$$

$$\text{Leyes del elemento neutro} \begin{cases} x + 0 = x \\ x \cdot 1 = x \end{cases}$$

$$\text{Leyes del complemento} \begin{cases} x + \bar{x} = 1 \\ x \cdot \bar{x} = 0 \end{cases}$$

Si B es un álgebra booleana, se escribe $B = (S, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$

Como en la notación estándar, por lo general se abreviará $a \cdot b$ como ab , como también se supondrá que el operador \cdot se evaluará primero que $+$. Todo esto permite eliminar algunos paréntesis y escribir de manera menos engorrosas

algunas expresiones, por ejemplo, se puede escribir $(x \cdot y) + z$ de manera más sencilla como $xy + z$.

Respecto a la definición anterior, se debe destacar que 0 y 1 son solo nombres simbólicos y, en general, no tienen nada que ver con los números 0 y 1. Esto mismo se aplica a $+$ y \cdot que solo denotan operadores binarios y, en general, no tienen nada que ver con la suma y el producto ordinario.

Ejemplo 1:

Sea U un conjunto universal y sea $S = P(U)$ el conjunto de las partes de U , si se definen las siguientes operaciones en S :

$$X + Y = X \cup Y, \quad X \cdot Y = X \cap Y, \quad \overline{X} = X^c$$

Entonces $(S, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, U)$ es un álgebra booleana. El conjunto vacío juega el papel de 0 y el conjunto universal el de 1. Si X, Y, Z son elementos de S las propiedades enunciadas en la definición anterior se convierten en las propiedades estudiadas oportunamente en la teoría de conjunto.

Ejemplo 2:

El conjunto de todas las fórmulas proposicionales de n variables (P), los operadores \wedge y \vee , \neg y F y el operador de negación \sim cumplen con todas las propiedades de un álgebra booleana, es decir que $(P, \wedge, \vee, \sim, \neg, F)$ es un álgebra booleana.

Ejemplo 3:

Sea $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$, los divisores de 70. Las operaciones $+$, \cdot , $\overline{}$ que se definen sobre D_{70} de la siguiente manera:

$$a + b = \text{mcm}(a, b) \quad a \cdot b = \text{mcd}(a, b), \quad \overline{a} = \frac{70}{a}$$

Entonces, D_{70} es un álgebra booleana con 1 como elemento cero y 70 como elemento unidad.

2.1. PROPIEDADES DE LAS ÁLGEBRAS BOOLEANAS

A partir de la definición de álgebras booleanas se pueden deducir otras propiedades.

Teorema 1:

En un álgebra booleana, el elemento \bar{x} es único. Específicamente si $x + y = 1$ y $xy = 0$ (1), entonces $y = \bar{x}$

Demostración:

$y = y \cdot 1$	Elemento neutro
$= y(x + \bar{x})$	Complemento
$= yx + y\bar{x}$	Distributiva
$= xy + y\bar{x}$	Conmutativa
$= 0 + y\bar{x}$	Por (1)
$= x\bar{x} + y\bar{x}$	Complemento
$= \bar{x}x + \bar{x}y$	Conmutativa
$= \bar{x}(x + y)$	Distributiva
$= \bar{x} \cdot 1$	Por (1)
$y = \bar{x}$	Elemento neutro

Teorema 2:

Sea $B = (S, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ un álgebra booleana, si x e y son dos elementos cualesquiera de S , entonces se cumplen las siguientes propiedades.

a) Leyes de acotación $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ x \cdot 0 = 0 \end{cases}$

b) Leyes de idempotencia $\begin{cases} x + x = x \\ x \cdot x = x \end{cases}$

c) Leyes de absorción $\begin{cases} x + x \cdot y = x \\ x \cdot (x + y) = x \end{cases} \quad \begin{cases} x + \bar{x} \cdot y = x + y \\ x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y \end{cases}$

d) Leyes de involución $\overline{\overline{x}} = x$

e) Leyes de De Morgan para las álgebras booleanas $\begin{cases} \overline{(x + y)} = \overline{x} \cdot \overline{y} \\ \overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y} \end{cases}$

f) Leyes del 0 y del 1 $\begin{cases} \overline{0} = 1 \\ \overline{1} = 0 \end{cases}$

Demostración:

a₁) $x + 1 = (x + 1) \cdot 1$ Elemento neutro

$x + 1 = (x + 1)(x + \overline{x})$ Complemento

$x + 1 = x + 1 \cdot \overline{x}$ Distributiva

$x + 1 = x + \overline{x} \cdot 1$ Conmutativa

$x + 1 = x + \overline{x}$ Elemento neutro

$x + 1 = 1$ Complemento

a₂) $x \cdot 0 = (x \cdot 0) + 0$ Elemento neutro

$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot \overline{x}$ Complemento

$x \cdot 0 = x \cdot (0 + \overline{x})$ Distributiva

$x \cdot 0 = x \cdot (\overline{x} + 0)$ Conmutativa

$x \cdot 0 = x \cdot \overline{x}$ Elemento neutro

$x \cdot 0 = 0$ Complemento

b₁) $x = x + 0$ Elemento neutro

$x = x + (x \cdot \overline{x})$ Complemento

$x = (x + x)(x + \overline{x})$ Distributiva

$x = (x + x) \cdot 1$ Complemento

$x = x + x$ Elemento neutro

b₂) $x = x \cdot 1$ Elemento neutro

$x = x \cdot (x + \overline{x})$ Complemento

$x = x \cdot x + x \cdot \overline{x}$ Distributiva

$$x = x x + 0 \quad \text{Complemento}$$

$$x = x x \quad \text{Elemento neutro}$$

$$c_1) x + xy = x 1 + xy \quad \text{Elemento neutro}$$

$$x + xy = x (1 + y) \quad \text{Distributiva}$$

$$x + xy = x (y + 1) \quad \text{Conmutativa}$$

$$x + xy = x 1 \quad \text{Acotación}$$

$$x + xy = x \quad \text{Elemento neutro}$$

c₂) De manera similar se puede demostrar $x (x + y) = x$

$$c_3) x + \bar{x}y = (x + \bar{x})(x + y) \quad \text{Distributiva}$$

$$x + \bar{x}y = 1 (x + y) \quad \text{Complemento}$$

$$x + \bar{x}y = (x + y) \quad \text{Elemento Neutro}$$

c₄) De manera similar se puede demostrar $x (\bar{x} + y) = xy$

d) Si el complemento único de \bar{x} es $\bar{\bar{x}}$, por la Ley del complemento debe cumplirse que:

$$\bar{x} + \bar{\bar{x}} = 1 \quad \text{y} \quad \bar{x} \bar{\bar{x}} = 0 \quad (1)$$

Por la misma ley se tiene que:

$$\begin{aligned} x + \bar{x} &= 1 & \text{y} & & x \bar{x} &= 0 \\ \bar{x} + x &= 1 & \text{y} & & \bar{x} x &= 0 \end{aligned} \quad (2) \text{ Conmutativa}$$

Comparando (1) y (2) se demuestra que $x = \bar{\bar{x}}$

e₁) Para demostrar que $\overline{(x + y)} = \bar{x} \bar{y}$, es decir que el complemento de la suma es igual al producto de los complementos de cada término, se puede razonar de la siguiente manera.

Si el complemento de $x + y$ es $\bar{x} \bar{y}$, debe cumplirse por la ley del complemento:

$$i) (x + y) + (\bar{x} \bar{y}) = 1 \quad \text{y} \quad ii) (x + y) (\bar{x} \bar{y}) = 0$$

Para demostrar i) se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (x + y) + (\bar{x} \bar{y}) &= ((x + y) + \bar{x}) ((x + y) + \bar{y}) && \text{Distributiva} \\
 &= ((y + x) + \bar{x}) ((x + y) + \bar{y}) && \text{Conmutativa} \\
 &= (y + (x + \bar{x})) (x + (y + \bar{y})) && \text{Asociativa} \\
 &= (y + 1) (x + 1) && \text{Complemento} \\
 &= 1 \quad 1 && \text{Acotación} \\
 &= 1 && \text{Elemento neutro}
 \end{aligned}$$

De manera similar se procede para ii)

$$\begin{aligned}
 (x + y) (\bar{x} \bar{y}) &= (\bar{x} \bar{y}) (x + y) && \text{Conmutativa} \\
 &= (\bar{x} \bar{y}) x + (\bar{x} \bar{y}) y && \text{Distributiva} \\
 &= x (\bar{x} \bar{y}) + (\bar{x} \bar{y}) y && \text{Conmutativa} \\
 &= (x \bar{x}) \bar{y} + \bar{x} (\bar{y} y) && \text{Asociativa} \\
 &= (x \bar{x}) \bar{y} + \bar{x} (y \bar{y}) && \text{Conmutativa} \\
 &= 0 \bar{y} + \bar{x} 0 && \text{Complemento} \\
 &= \bar{y} 0 + \bar{x} 0 && \text{Conmutativa} \\
 &= 0 + 0 && \text{Acotación} \\
 &= 0 && \text{Elemento neutro}
 \end{aligned}$$

Por i) y ii) se concluye que $\overline{(x + y)} = \bar{x} \bar{y}$

e₂) De manera similar se puede demostrar $\overline{(x \bar{y})} = \bar{x} + \bar{y}$

Nótese que las identidades de un álgebra booleana vienen por pares. Por ejemplo, las leyes del elemento neutro: $x + 0 = x$ y $x \cdot 1 = x$, tales pares son *duales*.

Definición:

El dual de una afirmación relacionada con expresiones booleanas se obtiene reemplazando 0 por 1, 1 por 0, + por \cdot y \cdot por +.

Por ejemplo, la expresión dual de $\overline{(x + y)} = \bar{x} \bar{y}$ es $\overline{(x \bar{y})} = \bar{x} + \bar{y}$

En la definición de álgebra booleana cada una de las leyes tiene su respectivo dual. Por lo tanto, podemos afirmar lo siguiente.

Teorema 3:

El dual de un teorema relativo a álgebras booleanas también es un teorema.

Demostración:

Supóngase que T es un teorema acerca de álgebras booleanas. Entonces existe una demostración D de T que solo implica la definición de un álgebra booleana. Sea D' la serie de afirmaciones obtenidas al reemplazar cada afirmación en D por su dual, entonces D' es una demostración del dual de T.

Ejemplo:

Obsérvese las demostraciones de las leyes de idempotencia.

$$b_1) x = x + 0$$

$$x = x + (x \bar{x})$$

$$x = (x + x)(x + \bar{x})$$

$$x = (x + x) 1$$

$$x = x + x$$

$$b_2) x = x 1$$

$$x = x (x + \bar{x})$$

$$x = x x + x \bar{x}$$

$$x = x x + 0$$

$$x = x x$$

Cada afirmación de b₂) es el dual de la respectiva afirmación de b₁). Se puede considerar indistintamente b₁) o b₂) como la expresión dual.

3. ÁLGEBRAS BOOLEANAS PARA CIRCUITOS COMBINACIONALES

Casi un siglo después de aparecer la obra de George Boole, varias personas observaron que el álgebra booleana se podía utilizar para el análisis de circuitos eléctricos, particularmente Claude Shannon. Así, el álgebra booleana se convirtió en una herramienta indispensable para el análisis y el diseño de las computadoras electrónicas en las décadas posteriores.

En una computadora digital solo existen dos posibilidades –que se escriben como 0 y 1– para el objeto mínimo e indivisible. Todos los programas y datos se pueden reducir, en última instancia, a combinaciones de bits. A través de los años se han utilizado varios dispositivos en las computadoras digitales para almacenar los bits. Los circuitos electrónicos permiten que estos dispositivos de almacenamiento se comuniquen entre sí.

Sea $S = \{ 0, 1 \}$ el conjunto de bits (dígitos binarios), con las operaciones binarias $+$ y \cdot , la operación unaria $\bar{}$ definidas respectivamente de la siguiente manera:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

$\bar{}$	0	1
	1	0

Entonces, $B = (S, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ es un álgebra booleana. Obsérvese que la operación $\bar{}$ simplemente cambia el bit; es decir $\bar{0} = 1$ y $\bar{1} = 0$.

Las operaciones definidas de esta manera son conocidas como suma booleana, producto booleano y complemento.

Las reglas de precedencia de los operadores son las siguientes: primero se calculan los complementos, seguido los productos booleanos y, finalmente, las sumas booleanas.

Ejemplo:

Evaluar $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} &= 0 + \bar{1} \\
 &= 0 + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por ser, $B = (S, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ un álgebra booleana, se cumplen las propiedades demostradas anteriormente en el teorema 2.

Otra forma útil para demostrar propiedades del álgebra booleana es utilizando tabla de valores.

Ejemplo:

Demostrar que se cumple la siguiente propiedad $x(y + z) = xy + xz$

La forma más sencilla de demostrar una propiedad es por tabla de valores.

x	y	z	$y + z$	$x(y + z)$	xy	xz	$xy + xz$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3.1. FUNCIONES Y EXPRESIONES BOOLEANAS

Sea $B = \{ 0, 1 \}$, entonces $B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ es el conjunto de todas las posibles n -tuplas de ceros y unos. La variable x se llama *variable booleana* si toma únicamente los valores del conjunto B . Una función $B^n \rightarrow B$ se llama *función booleana* de grado n . Las x_i son las variables independientes de la función.

Los valores que toma una función booleana suelen indicarse mediante tablas.

Por ejemplo, la función $F(x, y) = x \bar{y}$ que va del conjunto de los pares ordenados de valores booleanos al conjunto $\{0, 1\}$ es una función de grado dos, cuyos valores se muestran en la siguiente tabla.

x	y	\bar{y}	$F(x, y) = x \bar{y}$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Una *expresión booleana* es una expresión formada por alguno o todos los siguientes elementos: variables booleanas x_i , elementos 0 y 1, operadores booleanos.

Por ejemplo: $x y + \bar{z}$ es una expresión booleana. Estas expresiones también reciben el nombre de *polinomios booleanos*.

Dos expresiones booleanas distintas son *equivalentes* si una puede obtenerse de la otra mediante la aplicación de operaciones booleanas. Cuando son equivalentes representan la misma función booleana.

Por ejemplo, las expresiones booleanas $x y$, $x y + 0$, $x y + 1$ son equivalentes.

Cada expresión booleana representa una función booleana. Los valores de esta función se obtienen sustituyendo las variables de la expresión por 0 y 1.

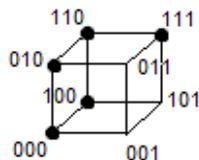
Ejemplo:

Calcular los valores de la función booleana $F(x, y, z) = x y + \bar{z}$

x	y	z	xy	\bar{z}	$F(x, y, z) = xy + \bar{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Las funciones booleanas pueden representarse gráficamente sin más que marcar los vértices del n-cubo que se corresponden con las n-tuplas de bits en las que la función vale 1.

La función booleana $F(x, y, z) = xy + \bar{z}$ de $B^3 \rightarrow B$ del ejemplo anterior puede representarse distinguiendo los vértices que se corresponden con las cinco ternas $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$ en las que $F(x, y, z) = xy + \bar{z} = 1$.



Dos funciones booleanas F y G de grado n , o de n variables, se dicen iguales si y solamente si:

$$F(b_1, b_2, \dots, b_n) = G(b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ para cualesquiera elementos } b_1, b_2, \dots, b_n \text{ de } B.$$

Una función booleana F se puede complementar, complementando los valores que toma, es decir que el complemento de la función booleana es la función \bar{F} donde $\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

Sean dos funciones booleanas F y G de grado n , se definen la suma booleana $F + G$ y el producto booleano $F G$ de la siguiente manera:

$$(F + G)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(F G)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Obsérvese que dos funciones booleanas F y G se pueden sumar o multiplicar, sumando o multiplicando sus valores booleanos por los respectivos valores de sus variables independientes.

¿Cuántas funciones booleanas de grado n hay?

Una función booleana de grados dos (dos variables) es una función de un conjunto con cuatro elementos (11, 10, 01, 00) en $B = \{0, 1\}$, un conjunto con dos elementos. Por lo tanto, hay 16 funciones booleanas distintas de grado dos. A continuación, se muestran los valores de estas funciones booleanas, etiquetadas con F_1, F_2, \dots, F_{16} .

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

De la regla del producto (Combinatoria) se sigue que hay 2^n n -tuplas distintas de ceros y unos. Puesto que una función booleana asigna el valor 0 o 1 a cada una de estas n -tuplas, la misma regla del producto indica que existen 2^{2^n} funciones booleanas distintas de grado n .

3.2. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS: DESARROLLO EN SUMAS DE PRODUCTOS

Uno de los importantes problemas que se da en el contexto del álgebra booleana es poder encontrar –a partir de los valores de una función booleana–

una expresión booleana que represente a dicha función. Este problema puede ser resuelto demostrando que toda función booleana se puede representar mediante una suma booleana de productos booleanos de variables y variables complementadas. La solución de este problema demuestra que toda función booleana puede ser representada utilizando los tres operadores booleanos: +, \cdot y $\bar{}$.

Se desarrollará, mediante un ejemplo, un importante procedimiento para encontrar una expresión booleana que represente a una función booleana.

Ejemplo:

Para cada una de las funciones $F(x, y, z)$ y $G(x, y, z)$ cuyos valores se muestran a continuación, calcular una expresión booleana que la represente.

Para representar F se necesita una expresión que valga 1 cuando $x = z = 1$ e $y = 0$, ya que es el único caso en donde la función toma el valor 1. Esa expresión se puede construir mediante el producto booleano de x , \bar{y} y z . Este producto $x \bar{y} z$, vale 1 si y solo si $x = \bar{y} = z = 1$, o sea, si $x = z = 1$ e $y = 0$.

Para representar G se necesita una expresión que valga 1 cuando $x = z = 0$ e $y = 1$ o bien cuando ocurra que $x = y = 1$ y $z = 0$. Esta expresión se puede construir mediante la suma booleana de dos productos booleanos.

El producto booleano $\bar{x} y \bar{z}$ vale 1 si y solo si $x = z = 0$ e $y = 1$. Análogamente, el producto booleano $x y \bar{z}$ vale 1 si y solo si $x = y = 1$ y $z = 0$. La suma booleana de ambas expresiones $\bar{x} y \bar{z} + x y \bar{z}$, representa a G puesto que vale 1 si y solo si $x = z = 0$ e $y = 1$ o bien $x = y = 1$ y $z = 0$.

Finalmente: $F(x, y, z) = x \bar{y} z$, $G(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z} + x y \bar{z}$

x	y	z	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Este ejemplo ilustra un procedimiento para construir una expresión booleana que represente una función booleana, conociendo los valores de dicha función. Cada combinación de los valores de las variables para los que la función vale 1, da lugar a un producto booleano de las variables y/o de sus complementos.

Definición:

Un literal es una variable booleana o una variable booleana complementada. Un minitérmino en las variables booleanas x_1, x_2, \dots, x_n es un producto booleano y_1, y_2, \dots, y_n en donde $y_i = x_i$ o $y_i = \overline{x_i}$.

Por lo tanto, un minitérmino es un producto de n literales con un literal por cada variable y valdrá 1 para una, y solo una, combinación de sus variables. Específicamente, el minitérmino y_1, y_2, \dots, y_n es 1 si y solo si, cada y_i es 1 y esto ocurre si y solo si $x_i = 1$ cuando $y_i = x_i$ y $x_i = 0$ cuando $y_i = \overline{x_i}$.

Ejemplo:

Hallar el minitérmino que vale 1 si $x_1 = x_3 = 0$ y $x_2 = x_4 = 1$, y vale 0 en cualquier otro caso.

El minitérmino que vale 1 para esta combinación de valores es $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4$.

Se puede construir una expresión booleana con un conjunto de valores prefijados sin más que realizar una suma booleana de distintos minitérminos. Particularmente, una suma booleana de minitérminos vale 1 cada vez que exactamente uno de los minitérminos de la suma vale 1 y vale 0 para las restantes combinaciones de las variables. En consecuencia, dada una función booleana, se puede construir una suma booleana de minitérminos que valga 1 cuando esta función booleana vale 1, y que valga 0 cuando la función tome el valor 0. A la suma de minitérminos que representa a la función se la llama *desarrollo en suma de productos* o bien *forma normal disyuntiva* de la función booleana.

Ejemplo:

Hallar la forma normal disyuntiva de la función booleana $F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$

Para solucionar este problema, se puede proceder de dos maneras, a saber.

a) Aplicando propiedades de un álgebra booleana

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= (x + y)\bar{z} \\
 &= x\bar{z} + y\bar{z} && \text{Distributiva} \\
 &= x1\bar{z} + 1y\bar{z} && \text{Elemento neutro} \\
 &= x(y + \bar{y})\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z} && \text{Complemento} \\
 &= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} && \text{Distributiva} \\
 &= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} && \text{Idempotencia}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma normal disyuntiva de F es $y(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

b) Usando tabla de valores, se calculan los valores de F para todos los posibles valores de las variables booleanas x, y, z .

x	y	z	$x + y$	\bar{z}	$(x + y) \bar{z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Por lo tanto, la forma normal disyuntiva de F es la suma booleana de los tres minitérminos correspondientes a las tres filas de la tabla en las que la función vale 1.

Es decir $F(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + x y \bar{z}$

También se puede obtener una expresión booleana que represente a una función booleana considerando el producto booleano de sumas booleanas. Al desarrollo resultante se le llama *desarrollo en producto de sumas* o bien *forma normal disyuntiva* de la función.

3.3. SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS

Al resolver un problema, en general, la función booleana obtenida no necesariamente es la óptima, es decir, la más fácil, sencilla y clara de implementar utilizando, por ejemplo, compuertas lógicas. La expresión que resulta del planteo del problema puede ser simplificada mediante dos formas distintas: haciendo uso de las propiedades del álgebra booleana o bien mediante diagrama de Karnaugh.

a) Simplificación mediante propiedades

La aplicación de las propiedades es muy sencilla, simplemente se comparan partes de la función booleana con las propiedades que permitan hacer más simple la función. Esto se lleva a cabo hasta que ya no sea posible simplificar.

Ejemplo:

Simplificar la siguiente función booleana $F(x, y, z) = \bar{x}y + \overline{(x y z)} + z(\bar{y} + x)$

$F(x, y, z) = \bar{x}y + \overline{(x y z)} + z(\bar{y} + x)$	
$F(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + z(\bar{y} + x)$	De Morgan
$F(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + z\bar{y} + zx$	Distributiva
$F(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{x} + \bar{y} + z\bar{y} + \bar{z} + zx$	Conmutativa
$F(x, y, z) = \bar{x}(y + 1) + \bar{y}(1 + z) + \bar{z} + zx$	Distributiva
$F(x, y, z) = \bar{x}1 + \bar{y}1 + \bar{z} + zx$	Acotación
$F(x, y, z) = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + zx$	Elemento neutro
$F(x, y, z) = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + x$	Absorción
$F(x, y, z) = (x + \bar{x}) + \bar{y} + \bar{z}$	Conmutativa / Asociativa
$F(x, y, z) = 1 + \bar{y} + \bar{z}$	Complemento
$F(x, y, z) = (1 + \bar{y}) + \bar{z}$	Asociativa
$F(x, y, z) = 1 + \bar{z}$	Acotación
$F(x, y, z) = (1 + \bar{z})$	Asociativa
$F(x, y, z) = 1$	Acotación

La expresión booleana en su forma más sencilla es $F = 1$, y este resultado indica que, si se sustituyen las diferentes combinaciones con los valores binarios 0 o 1 de las variables x, y, z en la función inicial, entonces el resultado será siempre igual a 1.

En general, luego de un proceso de simplificación, el resultado no siempre es 1, en cambio lo que se espera es obtener una expresión más simple conformada por menos variables.

Ejemplo 2:

Simplificar la siguiente función booleana $F(x, y, z, w) = x\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{z}w$

$$F(x, y, z, w) = x\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{z}w$$

$$F(x, y, z, w) = x\bar{z} + \bar{x}\bar{z}w + x\bar{y}z \quad \text{Conmutativa}$$

$$F(x, y, z, w) = \bar{z}(x + \bar{x}w) + x\bar{y}z \quad \text{Distributiva}$$

$$F(x, y, z, w) = \bar{z}(x + w) + x\bar{y}z \quad \text{Absorción}$$

$$F(x, y, z, w) = \bar{z}x + \bar{z}w + x\bar{y}z \quad \text{Distributiva}$$

$$F(x, y, z, w) = \bar{z}x + x\bar{y}z + \bar{z}w \quad \text{Conmutativa}$$

$$F(x, y, z, w) = x(\bar{z} + \bar{y}z) + \bar{z}w \quad \text{Distributiva}$$

$$F(x, y, z, w) = x(\bar{z} + z\bar{y}) + \bar{z}w \quad \text{Conmutativa}$$

$$F(x, y, z, w) = x(\bar{z} + \bar{y}) + \bar{z}w \quad \text{Absorción}$$

$$F(x, y, z, w) = x\bar{z} + x\bar{y} + \bar{z}w \quad \text{Distributiva}$$

En los ejemplos anteriores se aplicó una propiedad a la vez, esto se hizo para que no haya confusión en la aplicación de las mismas. Obviamente, cuando ya se tiene suficiente práctica, se pueden aplicar varias propiedades simultáneamente. Tampoco es necesario indicar qué propiedad se usa, sin embargo, se hizo para ilustrar la simplificación.

b) Simplificación mediante diagrama de Karnaugh

Para reducir el número de términos de una función booleana que representa a un circuito combinacional⁸ hace falta encontrar términos que se puedan combinar entre sí. El método gráfico llamado *diagrama de Karnaugh* o *K-diagrama* sirve para hallar términos que se puedan combinar en el caso de funciones booleanas que dependen, relativamente, de pocas variables (sirven para simplificar funciones de hasta seis variables, aunque se vuelven bastante complicados para casos de cinco o seis variables).

⁸ Los elementos básicos de los circuitos se llaman puertas lógicas. Cada tipo de puerta implementa una operación booleana.

Los K-diagramas proporcionan un método visual para simplificar una forma normal disyuntiva. Se verá primero cómo se usan estos diagramas para simplificar expresiones de funciones booleanas de dos variables, se continuará mostrando cómo se pueden utilizar para minimizar funciones de tres variables y, finalmente, para cuatro.

En la forma normal disyuntiva de una función de dos variables, x , y hay cuatro posibles minitérminos.

Un K-diagrama para una función booleana de dos variables consta de cuatro celdas.

	y	\bar{y}
x	$x y$	$x \bar{y}$
\bar{x}	$\bar{x} y$	$\bar{x} \bar{y}$

En general, el número de celdas depende de la cantidad de variables que intervengan en la función booleana y se puede calcular aplicando la fórmula $N^\circ \text{ casilla} = 2^{N^\circ \text{ de variable}}$.

Se coloca un 1 en la celda que representa a un minitérmino, si este minitérmino aparece en el desarrollo de la función. Caso contrario se coloca un 0. Se dice que dos celdas son *adyacentes* si los minitérminos que representan difieren exactamente en un literal. Por ejemplo, la celda que representa a $\bar{x} y$ es adyacente a la celda que representa a $x y$ y también a la que representa a $\bar{x} \bar{y}$.

Ejemplo 1:

Simplificar las siguientes funciones,

$$F(x, y) = x y + \bar{x} y, \quad G(x, y) = x \bar{y} + \bar{x} y, \quad H(x, y) = x \bar{y} + \bar{x} y + \bar{x} \bar{y}$$

Primero se hacen las K-diagramas y luego se colocan los 1 en donde correspondan.

	y	\bar{y}
x	1	
\bar{x}	1	

F

	y	\bar{y}
x		1
\bar{x}	1	

G

	y	\bar{y}
x		1
\bar{x}	1	1

H

Se rodean con un círculo los bloques de las celdas del K-diagrama que representan minitérminos que se pueden combinar y luego se calcula la correspondiente suma de productos.

Se agrupan los 1 en celdas adyacentes en bloques cuadrados o rectangulares 2, 4, 8, 16, . . . 2^n y se descartan las variables cuyo valor cambia de una celda a otra. La regla es agrupar la información con el menor número de bloques, ya que de cada uno se obtiene cuando menos un literal y los bloques deben estar conformados por el mayor número de celdas, porque entre más grande sea el número de celdas agrupadas por bloque más simple será la función booleana resultante.

	y	\bar{y}
x	1	0
\bar{x}	1	0

F

	y	\bar{y}
x	0	1
\bar{x}	1	0

G

	y	\bar{y}
x	0	1
\bar{x}	1	1

H

Obsérvese que los 1 pueden ser compartidos por distintos bloques, la regla es que un bloque debe tener al menos un 1 que sea exclusivamente de él. Además, si hay 1 en las cuatro celdas, se pueden combinar los cuatro minitérminos para dar lugar a uno solo que será la expresión booleana 1 que no depende de ninguna de las variables.

Para la función F, la variable que cambia de valor es x , mientras que la variable y mantiene su valor. Por lo tanto, se descarta x y se obtiene $F(x, y) = y$.

Para la función G no se puede descartar ninguna de las variables puesto que son bloques con un solo 1. En consecuencia, se obtiene $G(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}y$.

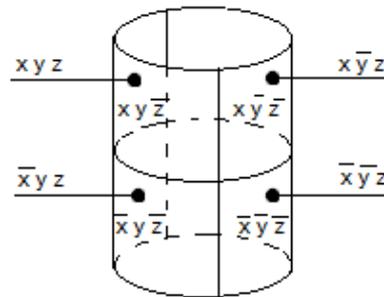
Finalmente, para la función H, por el bloque vertical se descarta la variable x obteniéndose \bar{y} , mientras que por el bloque horizontal se descarta la variable y obteniéndose \bar{x} , consecuentemente la función simplificada

$$\text{será: } H(x, y) = \bar{x} + \bar{y}.$$

Un K-diagrama de tres variables es un rectángulo dividido en ocho celdas y puede verse como si estuviese dibujado sobre un cilindro. Dos celdas tienen un lado en común sobre el cilindro si y solo si, son adyacentes. En general, si en un K-diagrama se unen los dos extremos ya sea horizontal o verticalmente, entonces, las celdas de las esquinas del mismo quedarán juntas y, por lo tanto, se las considerarán como celdas adyacentes. Esto permite realizar una mejor simplificación.

Obsérvese que la secuencia en que se coloca la expresión de las variables en el diagrama no es la binaria ascendente, sino una forma que solamente exige un cambio a la vez, es decir, una forma en la que no debe cambiar una variable en cada paso. A esta forma de arreglar las variables se la llama código reflejado.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
\bar{x}	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$



En general, cuando el número de variables que integran la función booleana es impar, el número de filas del diagrama es menor que el número de columnas. También es conveniente ordenar las variables alfabéticamente, colocando las primeras variables como filas y las restantes como columnas.

Ejemplo:

Simplificar la siguiente función booleana:

$$F(x, y, z) = x y z + x y \bar{z} + x \bar{y} z + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z + \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} \bar{y} \bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
\bar{x}	1		1	1

Por el bloque cuadrado se eliminan las variables z y x obteniéndose \bar{y} , por el bloque rectangular se eliminan las variables z e y obteniéndose x . Finalmente, por el bloque conformado por las dos columnas de los extremos se eliminan las variables x e y , obteniéndose z . Por lo tanto, $F(x, y, z) = x + \bar{y} + z$.

Un K-diagrama de cuatro variables es un cuadrado dividido en 16 celdas.

Ejemplo:

Simplificar la siguiente expresión booleana.

$$F(w, x, y, z) = wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}xyz + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$w x$		1	1	
$w \bar{x}$	1	1	1	
$\bar{w} \bar{x}$		1	1	
$\bar{w} x$	1	1	1	1

Del bloque que contiene ocho 1, se elimina, en primer lugar las variables w y x , luego se elimina la variable y , por lo tanto, se obtiene \bar{z} . Del bloque de cuatro 1, se eliminan tanto la variable y como la z , obteniéndose $\bar{w} x$. Finalmente, del bloque que contiene dos 1 se elimina solamente la variable z , obteniéndose $w \bar{x} y$. Por lo tanto, la función simplificada es $F(w, x, y, z) = \bar{z} + \bar{w} x + w \bar{x} y$

Si en la expresión original de la función booleana algunos de los minitérminos no tienen todas las variables intervinientes, este minitérmino equivale a las variables que se dan originalmente en todas las posibles combinaciones de las variables faltantes.

Ejemplo:

Para simplificar la función $F(w, x, y, z) = \bar{w} \bar{x} \bar{y} z + \bar{w} \bar{x} y + y z + w \bar{x} y z + w \bar{x} y \bar{z}$ se debe tener en cuenta que $\bar{w} \bar{x} y = \bar{w} \bar{x} y z + \bar{w} \bar{x} y \bar{z}$, es decir que no se trabaja con el minitérmino incompleto, sino con su equivalente. Lo mismo para el minitérmino $y z = w x y z + w \bar{x} y z + \bar{w} x y z + \bar{w} \bar{x} y z$.

Simplificar $F(w, x, y, z) = \bar{w} \bar{x} \bar{y} z + \bar{w} \bar{x} y + y z + w \bar{x} y z + w \bar{x} y \bar{z}$ y obtener la expresión en suma de productos y productos de sumas.

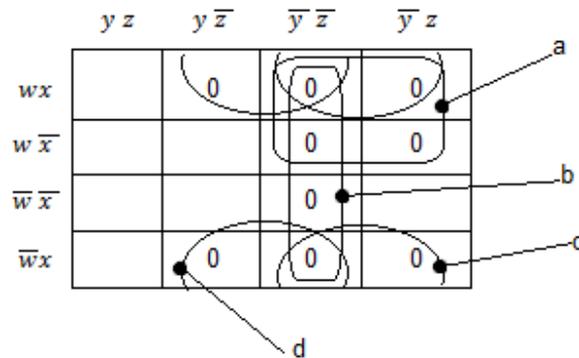
Usando la información tanto de los minitérminos que se completaron, como los inicialmente completos, se obtiene el siguiente K-diagrama.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1			
$w\bar{x}$	1	1		
$\bar{w}\bar{x}$	1	1		1
$\bar{w}x$	1			

Obsérvese que existen minitérminos repetidos ($\bar{w} \bar{x} y z$; $w \bar{x} y z$); obviamente se los considera una sola vez.

Haciendo las simplificaciones según los bloques propuestos, se obtiene la función simplificada en suma de productos $F(w, x, y, z) = \bar{x} y + y z + \bar{w} \bar{x} z$. Obsérvese que el primer término corresponde al bloque cuadrado, el segundo término al bloque rectangular y el último término al bloque de dos 1 de las casillas de las columnas de los extremos.

En el caso de *producto de sumas* se utiliza el mismo K-diagrama, pero en las celdas vacías se colocan ceros y se agrupa la información de manera semejante a cuando se tienen unos, como se muestra a continuación.



Para evitar confusiones, a los distintos bloques propuestos se le asignaron letras. Así, del bloque “a” se obtiene $w \bar{y}$, del bloque “b” $\bar{y} \bar{z}$, del bloque “c” $x \bar{y}$ y, por último, del bloque “d” queda $x \bar{z}$. Se obtiene la siguiente expresión complementada debido a que se usaron las celdas de ceros no las de unos.

$$\bar{F}(w, x, y, z) = w \bar{y} + \bar{y} \bar{z} + x \bar{y} + x \bar{z}$$

Complementando ambos miembros de la función booleana resulta

$$\overline{\bar{F}(w, x, y, z)} = \overline{(w \bar{y} + \bar{y} \bar{z} + x \bar{y} + x \bar{z})}$$

Aplicando la ley de De Morgan se tiene

$$F(w, x, y, z) = \overline{(w \bar{y})} \overline{(\bar{y} \bar{z})} \overline{(x \bar{y})} \overline{(x \bar{z})}$$

Aplicando nuevamente la ley de De Morgan

$$F(w, x, y, z) = (\bar{w} + y)(y + z)(\bar{x} + y)(\bar{x} + z)$$

Esta es la expresión booleana simplificada en productos de sumas de la función dada.

Obsérvese que no es igual la función booleana simplificada en sumas de productos que la que se obtuvo en productos de sumas, sin embargo se puede decir que son lógicamente equivalentes. Esto se puede demostrar usando

propiedades del álgebra booleana o bien elaborando las tablas de valores correspondientes.

$$F(w, x, y, z) = \bar{w}y + yz + \bar{w}\bar{x}z$$

$$F(w, x, y, z) = (\bar{w} + y)(y + z)(\bar{x} + y)(\bar{x} + z)$$

Emplear los K-diagramas para simplificar funciones booleanas de cinco o seis variables puede ser una opción realista, pero los K-diagramas con un número mayor de variables se complican mucho, por lo que se emplean en raras ocasiones.

4. APLICACIONES DEL ÁLGEBRA BOOLEANA

Los circuitos de las computadoras, así como otros componentes electrónicos, reciben datos de entrada cada uno de los cuales es un 0 o un 1 y producen también como salida ceros y unos. Los circuitos pueden construirse utilizando cualquier elemento básico que posea dos estados diferentes. Entre esos elementos se encuentran los interruptores que pueden estar en posición *on* o en *off* y los dispositivos ópticos que pueden estar encendidos o apagados.

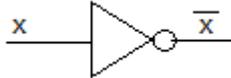
4.1. COMPUERTAS LÓGICAS

Un bloque lógico es una representación simbólica gráfica de una o más variables de entrada a un operador lógico para obtener una señal determinada o resultado. Los símbolos varían de acuerdo con la rama donde se utiliza o bien del fabricante. Cada bloque lógico representa un dispositivo que permite manipular la señal según el campo de acción, en mecánica se los llama válvulas (paso del aire o aceite); en electricidad apagadores, contactos (paso de corriente eléctrica) y en electrónica, puertas o compuertas (paso de pulsos eléctricos).

Se tratarán los símbolos usados en electrónica para la representación de las compuertas, ya que son los que interesan al área de computación; sin

embargo, el tratamiento teórico por medio del álgebra booleana es válido para todos ellos, independientemente del área.

Compuertas básicas

Compuerta	Símbolo
O (Or)	
Y (And)	
No (Not)	
Or-exclusivo (Xor)	

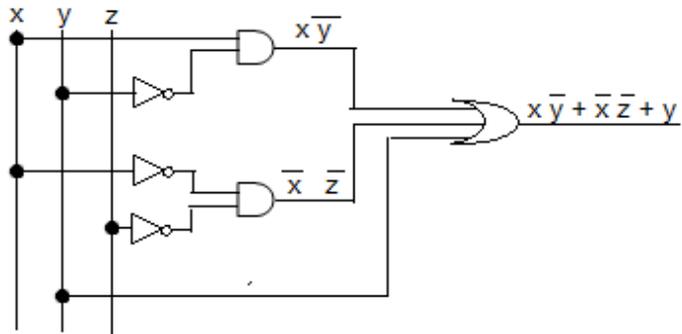
Las compuertas pueden recibir una o más señales de entrada. x e y son señales que entran a la compuerta y pueden tener un valor de 1 o 0 dependiendo de si existe o no la señal, la cual procede de un sensor o bien de la salida de una compuerta anterior. Esos valores de entrada generan una sola salida, que a su vez también es 0 o 1, dependiendo de la compuerta que se trate y de los valores de las señales de entrada.

Para representar funciones booleanas mediante compuertas lógicas es conveniente tener en cuenta las tablas de verdad de los operadores lógicos (\vee , \wedge , \sim) vistas en lógica proposicional.

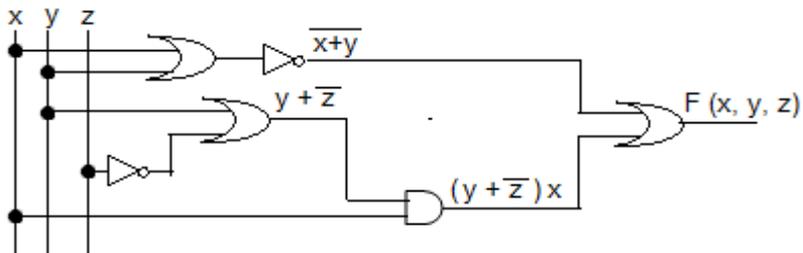
Ejemplo:

Representar las siguientes funciones booleanas usando puertas lógicas básicas.

a) $F(x, y, z) = x\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + y$



b) $F(x, y, z) = \overline{(x + y)} + (y + \bar{z})x$



También existen compuertas lógicas compuestas como Nand que es la combinación de los operadores Not y And; o la compuerta Nor que es la combinación de los operadores Not y Or.

Compuerta	Símbolo
Nor	
Nand	

Xnor



Generalmente, los circuitos digitales se construyen con compuertas Nand y Nor, ya que son más fáciles de encontrar en el mercado, son más comunes desde el punto de vista del hardware y están disponibles en la forma de circuitos integrados.

4.2. ELECTRÓNICA DIGITAL

En el apartado anterior se vio que los dispositivos con los que se implementan las funciones booleanas son las compuertas lógicas; estas, al combinarse, han permitido, inicialmente, la creación de la válvula electrónica (tubo de vacío o bulbo), posteriormente la del “transistor” y, actualmente, la del “chip”, elementos con los cuales se construye todo tipo de aparato electrónico digital. La electrónica digital es una parte de la electrónica que maneja información codificada en dos estados: falso y verdadero o más comúnmente 0 y 1. Electrónicamente se asigna a cada uno un voltaje o rango de voltaje determinado. Esta particularidad permite que, usando el álgebra booleana y con un sistema de numeración binario, se puedan realizar complejas operaciones lógicas o aritméticas sobre señales de entrada. La electrónica digital ha alcanzado una gran importancia debido a que constituye la piedra angular de las computadoras.

Las computadoras realizan el trabajo por medio de un microprocesador, el cual es un circuito de alta escala de integración compuesto por muchos circuitos simples como flip-flops, contadores, decodificadores, comparadores, etc., todos en una misma pastilla de silicio en donde se utilizan compuertas del álgebra booleana para llevar a cabo las operaciones lógicas.

Las microoperaciones que lleva a cabo el microprocesador se realiza en lenguaje binario a nivel bit. Por ejemplo, si $x = 110010$, $y = 011011$ se pueden llevar a cabo las siguientes operaciones:

$$x \wedge y = 110010 \wedge 011011 = 010010$$

$$x \vee y = 110010 \vee 011011 = 111011$$

$$\overline{x} = \overline{(110010)} = 001101$$

Basada en el álgebra booleana, la unidad lógica aritmética (ALU: Arithmetic Logic Unit) es la parte del microprocesador que realiza las operaciones aritméticas y lógicas en los datos.

Como se puede ver, la computadora está integrada por elementos que utilizan el álgebra booleana para su desarrollo y funcionamiento. Sin embargo, no es para lo único que se utiliza el álgebra booleana, ya que otra de sus aplicaciones que actualmente está teniendo mucho éxito es la relacionada con la construcción de robots.

TRABAJO PRÁCTICO: ÁLGEBRA BOOLEANA

1a) Demostrar, sin usar tabla de valores, la ley de absorción: $x(x + y) = x$

b) Demostrar, sin usar tabla de valores, la ley de De Morgan: $\overline{(x y)} = \bar{x} + \bar{y}$

c) Demostrar, usando tabla de valores, las propiedades $\begin{cases} x + \bar{x}y = x + y \\ x(\bar{x} + y) = xy \end{cases}$

d) Demostrar usando tabla de valores las propiedades distributivas.

2. ¿Para qué valores de las variables booleanas x e y se satisface la siguiente igualdad $xy = x + y$?

3. Calcular los valores y representar mediante un Q_3 (3-cubo) cada una de las siguientes funciones booleanas.

a) $F(x, y, z) = x + yz$

b) $F(x, y, z) = x\bar{y} + \overline{(x y z)}$

c) $F(x, y, z) = y(xz + \bar{y}\bar{z})$

d) $F(x, y, z) = \bar{y}(xz + \bar{x}\bar{z})$

4. El operador booleano \oplus , llamado operador XOR, se define de la siguiente manera: $1 \oplus 1 = 0$; $1 \oplus 0 = 1$; $0 \oplus 1 = 1$ y $0 \oplus 0 = 0$.

a) Determinar el valor de las siguientes expresiones:

i) $x \oplus 0$

iv) $x \oplus \bar{x}$

ii) $x \oplus 1$

v) $x \oplus x$

b) Demostrar que se cumplen las siguientes relaciones:

i). $x \oplus y = (x + y)\overline{(x y)}$

ii). $x \oplus y = (x \bar{y})(\bar{x} y)$

iii). $x \oplus y = y \oplus x$

5. Hallar la forma normal disyuntiva de las siguientes funciones booleanas usando tabla de valores y verificar por medio de propiedades.

i) $F(x, y, z) = (x + z) \cdot y$

ii) $F(x, y, z) = \bar{x} + y$

iii) $F(x, y, z) = x \bar{y}$

iv) $F(x, y, z) = (\bar{x} \cdot \bar{z}) \bar{y}$

v) $F(x, y, z) = \overline{(\bar{x} + z) + (\bar{x} \cdot y)}$

6. Hallar la forma normal disyuntiva de la función booleana $F(x, y, z)$ que vale 1 si y solo si:

i) $x y = 0$

ii) $y = 0$

iii) $x \cdot y \cdot z = 0$

7. Simplificar las siguientes expresiones booleanas usando diagramas de Karnaugh y verificar los resultados por medio de propiedades del álgebra booleana

i) $F = w x y z + w x \bar{y} z + w x \bar{y} \bar{z} + w \bar{x} y \bar{z} + D \bar{x} \bar{y} z$

ii) $F = w x y \bar{z} + w x \bar{y} z + w \bar{x} y z + \bar{w} x \bar{y} z + \bar{w} \bar{x} y \bar{z} + \bar{w} \bar{x} \bar{y} z$

iii) $F = wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$

iv) $F = wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$

8. Para las funciones del punto anterior, obtener el producto de sumas y verificar que la suma de productos y el producto de suma sean lógicamente equivalentes.

AUTOEVALUACIÓN: ÁLGEBRA BOOLEANA

1. Responder Verdadero o Falso, NO justificar la respuesta. Responder con tinta.

a) El conjunto de todas las fórmulas proposicionales de n variables, los operadores $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \sim$ forman un álgebra de booleana.

--

b) Una de las propiedades del álgebra booleana establece: $\overline{(x + y)} = \bar{x} + \bar{y}$

--

c) En el desarrollo de una función booleana en suma de productos, un literal es una variable booleana complementada.

--

d) En el álgebra booleana $B = (S, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$, S es un conjunto cualquiera.

--

e) El dual de un teorema relativo a álgebras booleanas también es un teorema

--

2. Completar con la respuesta correcta. Escribir con tinta.

a) La propiedad dual de $x + yz = (x + y)(x + z)$ es

b) Los valores de las variables booleanas x e y que satisfacen la igualdad $x \cdot (x + y) = x$ son:

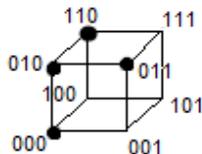
c) Existen 4 funciones booleanas distintas de grado 1 y 16 funciones booleanas distintas de grado 2. Los valores de estas funciones se muestran en las dos siguientes tablas:

d) La variable x se llama *variable booleana* si.....

e) Una *expresión booleana* es una expresión formada por.....

3. Escribir con tinta y en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) La función booleana representada por el siguiente 3-cubo es:



A) $F(x, y, z) = x \cdot \bar{y} + z$

B) $F(x, y, z) = x + \bar{z} \cdot y$

C) $F(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} + z$

D) $F(x, y, z) = x \cdot y + \bar{z}$

b) Los valores $x = y = z = 0 \vee x = y = z = 1$ satisfacen la igualdad:

A) $x \cdot (y + z) = x + y \cdot z$

B) $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = x + y$

C) $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = x \cdot y \cdot z$

D) $x \cdot \bar{y} \cdot z = x + y + \bar{z}$

c) La propiedad dual de $x + \bar{x} \cdot y = x + y$ es la expresión:

A) $x + (\bar{x} + y) = x \cdot y$

B) $\bar{x} \cdot (x + y) = x \cdot y$

C) $x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$

D) $x + x \cdot \bar{y} = x + y$

d) Un literal es:

A) Solamente una variable booleana

B) Solamente una variable booleana complementada

C) Una variable booleana o una variable booleana complementada

D) Una variable booleana y una variable booleana complementada

e) En un K-diagrama, los 1 se agrupan en bloques de:

A) 2, 4, 6, 8, ...

B) 2, 4, 8, 16, ...

C) 1, 2, 4, 8, 16, ...

D) 1, 2, 4, 6, 8, ...

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN: ÁLGEBRA BOOLEANA

Para cada uno de los siguientes enunciados, escribir el programa o subrutina solicitado. En cada caso, el usuario deberá ingresar:

- 1.** Una de las cinco propiedades de la definición de álgebra booleana y se deberá mostrar la correspondiente tabla de valores para evidenciar la verdad de la propiedad.
- 2.** Una expresión booleana y se deberá visualizar su dual.
- 3.** Una expresión booleana específica (0, 1, y operadores booleanos) y se deberá evaluar dicha expresión.
- 4.** Dos expresiones booleanas y se deberá demostrar, por tabla de valores, que son equivalentes.
- 5.** Una función booleana y visualizar su tabla de valores.
- 6.** Una función booleana y representarla gráficamente.
- 7.** Dos funciones booleanas F y G de grado n y sumarlas.
- 8.** Dos funciones booleanas F y G de grado n y multiplicarlas.
- 9.** La tabla de valores de una función booleana y mostrar una expresión booleana en suma de productos que la represente.

BIBLIOGRAFÍA

Disset, L. (2004). *Apuntes de Clases – Matemática Discreta*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile.

García Merayo, F.; Hernández Peñalver, G. y Nevot Luna, A. (2007). *Problemas Resueltos de Matemáticas Discretas*. (Primera edición). España: Thomson Editores.

Jiménez Murillo, J. (2011). *Matemática para la computación*. (Primera edición). México: Alfa Omega Grupo editor S. A

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. (Sexta edición). (Traducción de Gonzales Osuna, M.). México: Prentice Hall.

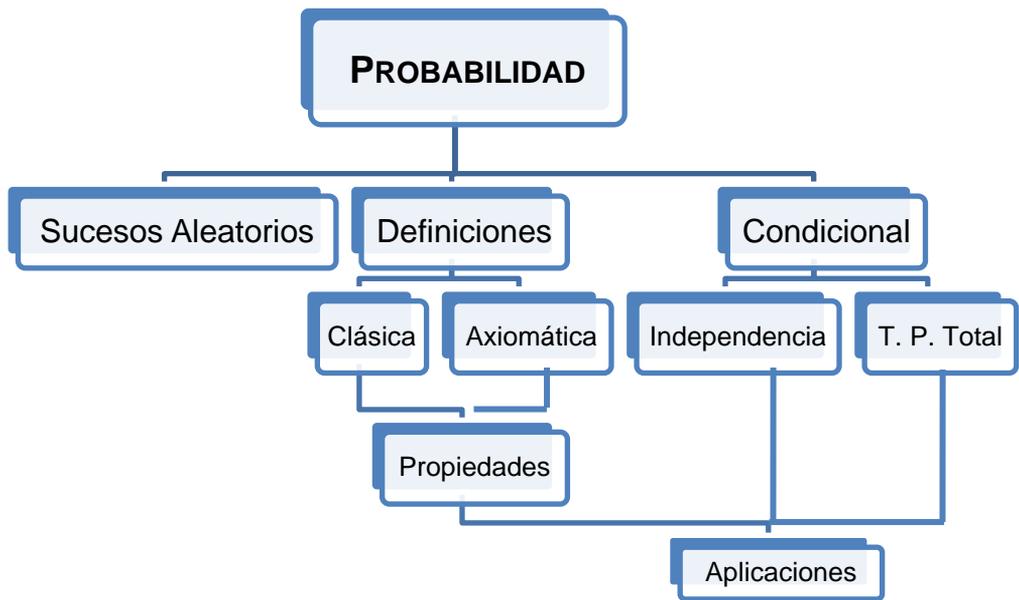
Johnsonbaugh, R. (1999). *Matemáticas Discretas*. (Cuarta edición). (Traducción de Palmas Velasco, Oscar A.). México: Prentice Hall.

Kolman, B.; Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de Matemáticas discretas para la Computación*. (Tercera edición). (Traducción de Palmas Velasco, O.). México: Prentice – Hall Hispanoamericana S. A.

Lipschutz, S. y Lipson, M. (2007). *Matemáticas Discretas*. (Tercera edición). (Revisión técnica María de Lourdes Quezada Batalla). México: Mc Graw Hill.

Rosen, K. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (Quinta edición). (Traducción: Pérez Morales y otros). España: Mc Graw Hill.

PROBABILIDADES



OBJETIVOS

- ✓ Identificar sucesos aleatorios.
- ✓ Adquirir los dos conceptos de probabilidad.
- ✓ Reconocer y aplicar las distintas propiedades de la probabilidad.
- ✓ Distinguir el concepto de probabilidad condicional.
- ✓ Determinar si dos sucesos son o no independientes.
- ✓ Determinar las condiciones y aplicar el teorema de la probabilidad total.
- ✓ Resolver situaciones problemáticas haciendo uso de los distintos conceptos que brinda la probabilidad.

Probabilidad

1. INTRODUCCIÓN

El Análisis Combinatorio y la Teoría de la Probabilidad tienen orígenes comunes: el análisis de juegos de azar. La teoría de la probabilidad comenzó a desarrollarse hace más de trescientos años, cuando Blaise Pascal se interesó por algunos juegos de azar. Fue durante esos estudios cuando Pascal descubrió varias propiedades de los coeficientes binomiales (Teorema del binomio). Luego, el matemático francés, Laplace, estudiando también juegos de azar, definió la probabilidad de un suceso, que dio lugar al desarrollo de muchos de los fundamentos de la teoría de la probabilidad.

En la actualidad, la teoría de la probabilidad desempeña un importante papel en diversas disciplinas. Por ejemplo, esta teoría tiene un papel central en el estudio de la genética donde se la puede utilizar para explicar la herencia de diferentes rasgos físicos. Por supuesto, la probabilidad sigue siendo una parte muy popular de las matemáticas por sus aplicaciones a los juegos de azar, que siguen recibiendo atención por parte de mucha gente.

En informática, la teoría de la probabilidad también desempeña un papel importante en el estudio de la complejidad de los algoritmos. En particular, ideas y técnicas de esta teoría se usan para determinar la complejidad media de los algoritmos. Los algoritmos probabilísticos se pueden utilizar para resolver muchos problemas que no pueden tratarse, de forma sencilla y eficiente, utilizando algoritmos deterministas. Un algoritmo probabilístico, en lugar de seguir siempre los mismos pasos cuando los datos son idénticos como hace un algoritmo determinista, toma algunas decisiones de forma aleatoria, lo que puede llevar a resultados distintos.

2. SUCESOS ALEATORIOS

La teoría de la probabilidad estudia los llamados experimentos aleatorios, es decir aquellos experimentos que pueden dar lugar a varios resultados sin que se pueda predecir con certeza el resultado concreto. Al repetir el experimento bajo condiciones similares, se obtendrán resultados que, por lo general, serán distintos. En consecuencia, se puede decir que las características de los experimentos aleatorios son las siguientes:

- ✓ Es posible repetir el experimento en forma indefinida sin cambiar esencialmente las condiciones en las que se realiza.
- ✓ No es posible predecir un resultado en particular.
- ✓ Se puede describir el conjunto de todos los resultados posibles.
- ✓ A medida que el experimento se repite, los resultados parecen ocurrir en forma caprichosa, pero cuando se repite un número considerable de veces se puede observar un comportamiento de regularidad que lo caracteriza.

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama *espacio muestral*, y suele representárselo por medio de la letra S .

Definición:

Se llama espacio muestral al conjunto S de todos los resultados posibles de un experimento o fenómeno aleatorio E .

Los siguientes son ejemplos de experimentos aleatorios con sus posibles espacios muestrales.

E_1 : lanzar una moneda; $S_1 = \{c, s\}$

E_2 : lanzar dos monedas; $S_2 = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$ que corresponde a un espacio muestral detallado. También podría ser $S_2 = \{0, 1, 2\}$ si lo que interesa es indicar el número de caras obtenidas en cada lanzamiento. Hay que diferenciar entre los resultados (c, s) y (s, c) lo que se puede lograr pintando las dos monedas de colores distintos, supóngase rojo y blanco, entonces (c, s)

corresponde a obtener cara en la moneda roja y sello en la moneda blanca, mientras que (s, c) corresponde a la situación inversa. Una tercera forma de razonar el experimento es considerar que la moneda es la misma y que se la tira dos veces.

E_3 : lanzar un dado; $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_4 : lanzar dos dados; el espacio muestral detallado es el Producto Cartesiano $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es decir $S_4 = \{(1, 1), (1, 2) \dots (3, 1), \dots (6, 6)\}$

E_5 : medición del agua de lluvia caída diariamente (h , medida en mm) en una estación de monitoreo $S_5 = \{h \mid 0 \leq h \leq 100\}$. Supóngase que el agua caída en ese lugar no supera los 100 mm.

No siempre es posible describir el espacio muestral enumerando sus diferentes elementos. A veces se lo define por medio de una condición, o regla, que deben cumplir sus elementos (ej. puntos que se sitúan en una circunferencia). Dependiendo del número de resultados posibles del experimento aleatorio, el espacio muestral podrá ser: *finito* (ej. resultados de la tirada de un dado), *infinito numerable* (cuando a cada elemento del espacio se le puede hacer corresponder un número entero sin límite, ej. vida en años de un componente electrónico), e *infinito no numerable* (ej. números reales en el intervalo $[0, 1]$).

Se llama suceso a un subconjunto A del espacio muestral, es decir un subconjunto de resultados posibles del experimento.

Definición:

Se llama suceso o evento a todo subconjunto del espacio muestral.

Una consecuencia de esta definición es que el propio espacio muestral S y el conjunto vacío son considerados sucesos.

Para designar sucesos se utilizan las primeras letras del abecedario en mayúsculas: A, B, C, . . . , etc. Así $A = \{c\}$ es un suceso asociado a $S_1 = \{c, s\}$; $B = \{(c, s), (c, c)\}$ es un suceso asociado al espacio muestral $S_2 = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$ es un suceso asociado a $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Los sucesos más simples son los *sucesos elementales*, que consisten en un único punto del espacio muestral. De forma más exacta, se puede definir los sucesos elementales de un experimento aleatorio como aquellos sucesos que verifican:

- ✓ siempre ocurre alguno de ellos, y
- ✓ son mutuamente excluyentes.

Por ejemplo, obtener un 4 es un suceso *elemental* del experimento de lanzar un dado. Vale decir $A = \{4\}$. Por otra parte, un suceso es *compuesto* cuando – al contrario de los sucesos elementales– puede ser descompuesto en sucesos más simples. Es decir, serían los sucesos que se pueden construir a partir de la unión de sucesos elementales.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, al hecho de obtener un número par le corresponde el suceso compuesto $A = \{2, 4, 6\}$.

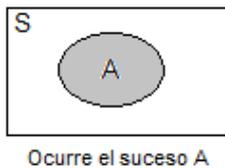
Existen dos sucesos particulares especialmente interesantes. El primero es el suceso imposible \emptyset , es decir, el subconjunto vacío del espacio muestral sería el suceso que no ocurrirá nunca. Por otra parte, el propio espacio muestral será el suceso seguro. S, ocurrirá siempre. Cuando un suceso no coincide ni con el suceso imposible ni con el seguro, se dice que el suceso es probable.

Con la finalidad de tener un lenguaje exento de ambigüedades es necesario establecer una notación precisa para expresar nuevos sucesos a partir de la combinación de dos o más de ellos. Esta notación se logra a través del uso de la Teoría de Conjuntos, puesto que los sucesos aleatorios se definieron como tales.

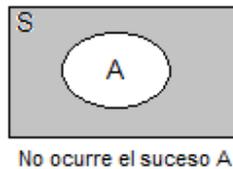
Por lo tanto, se pueden definir entre los sucesos las mismas operaciones que se realizan sobre los conjuntos abstractos.

El área sombreada de cada figura representa el sector en el cual se ubica el resultado del experimento. Si $x \in S$ es el resultado de un experimento, entonces se dice que:

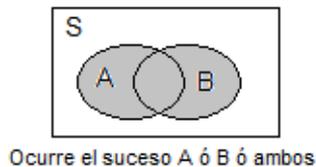
a) Ocorre un suceso A si y solo si $x \in A$, esto se denota por A .



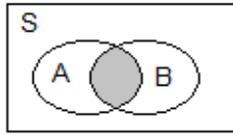
b) No ocurre un suceso A si y solo si $x \in \bar{A}$, esto se denota por \bar{A} .



c) Ocorre el suceso A o B, o ambos si y solo si $x \in A \cup B$, esto se denota por $A \cup B$.

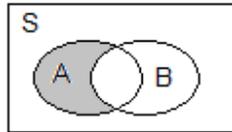


d) Ocorre el suceso A y B si y solo si $x \in A \cap B$, esto se denota por $A \cap B$.



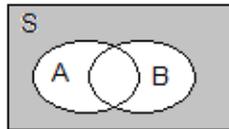
Ocorre el suceso A y B

e) Ocorre el suceso A pero no el B (solo ocurre A) si y solo si $x \in A \cap \overline{B}$, esto se denota por $A \cap \overline{B}$.



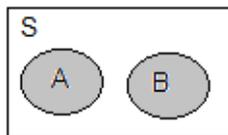
Ocorre el suceso A pero no el B

f) No ocurre el suceso A ni el B (no ocurre ninguno de los sucesos) si y solo si $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, esto se denota por $\overline{A} \cap \overline{B}$.



No ocurre el suceso A ni el B

g) Los sucesos A y B no ocurren juntos si y solo si $A \cap B = \emptyset$.



Los sucesos A y B no ocurren juntos

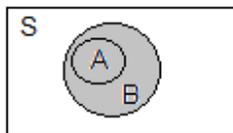
Esta última situación lleva a definir sucesos mutuamente excluyentes, es decir que nunca pueden ocurrir simultáneamente.

Definición:

Se dice que dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente.

La importancia de la condición de exclusión es que permite establecer que si uno de los sucesos ocurre, entonces el otro no puede ocurrir.

h) Siempre que ocurre el suceso A ocurre también a la vez el B ($A \subseteq B$) si y solo si $x \in (A \subseteq B)$, esto se denota por $A \subseteq B$.



Ocurre el suceso A y a la vez el B

Es evidente que para cualquier suceso A se cumple que $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$.

3. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

El concepto de probabilidad surge para medir la certeza o incertidumbre de un suceso de un experimento aleatorio. Esta teoría aparece por la necesidad de encontrar estrategias óptimas para los juegos de azar, aunque rápidamente sobrepasó este campo. La forma más directa de saber la posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento aleatorio es repetir dicho experimento muchas veces.

3.1. CONCEPTO CLÁSICO DE PROBABILIDAD

Supóngase que se repite n veces el experimento E. Sea A un suceso cualquiera asociado a E. Llámese frecuencia absoluta de A, f_A , al número de veces que ocurre el suceso A y frecuencia relativa de A, f_R , al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento. Es decir que

$$f_R = \frac{f_A}{n}$$

La frecuencia relativa tiene las siguientes propiedades:

a) $0 \leq f_R \leq 1$

b) $f_R = 1$ si y solo si A ocurre en las n repeticiones, es decir, ocurre siempre.

c) $f_R = 0$ si y solo si A no ocurre nunca en las n repeticiones.

d) Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes, entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

e) Si n se repite indefinidamente, es decir, “n tiende al infinito”, entonces la frecuencia relativa f_R tiende a la probabilidad del suceso A.

De esta forma se puede considerar que f_R es la probabilidad empírica de A, entonces se puede definir la *probabilidad P(A) del suceso A* como:

$$P(A) \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_A}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{frecuencia absoluta del suceso A}}{n^\circ \text{ de vees que se repite el experimento}}$$

Esta definición indica que la probabilidad del suceso A, P(A), es el límite cuando n tiende al infinito de la frecuencia relativa del suceso.

Obsérvese que si el suceso ocurre siempre $F_A = n$ y $P(A) = 1$; por el contrario, si el suceso no ocurre nunca $f_A = 0$ y $P(A) = 0$. De esta forma, la probabilidad de un suceso está comprendida entre 0 y 1, vale decir que $0 \leq P(A) \leq 1$, y el suceso será tanto más probable cuanto más se acerque a 1 su probabilidad.

Ejemplo:

Lanzar una moneda al aire es un experimento clásico. Sea el suceso C: sale cara y el suceso D: sale sello. La probabilidad de C como la de D es $P(C) = P(D) = 0,5$.

En el año 1900, el estadístico Pearson realizó este experimento con un total de 24000 lanzamientos –tardó unas 40 horas en realizarlo– y obtuvo un resultado de 12012 caras (y 11988 sellos). Esto significa que $P(C) = \frac{12.012}{24.000} = 0,5005$ que es un valor muy próximo a la probabilidad teórica.

La definición anterior implica, obviamente, que hay que repetir un gran número de veces el experimento para calcular la probabilidad de un suceso. Afortunadamente, el cálculo de la probabilidad se puede simplificar mucho en

el caso de que todos los sucesos elementales sean equiprobables⁹, es decir, que sus frecuencias sean iguales cuando el experimento se repita un gran número de veces. En este caso, la probabilidad de un suceso se puede establecer a partir de la definición introducida por Laplace, según la cual $P(A)$ es el cociente entre el número a de casos favorables al suceso A (o número de sucesos elementales en que se da A) y el número N de casos posibles (o número de sucesos elementales del espacio muestral).

$$P(A) = \frac{a}{N} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

En particular, en este caso de sucesos equiprobables, la probabilidad de un suceso elemental será $P(A) = \frac{1}{N}$. La definición anterior también se conoce con el nombre de definición clásica de probabilidad.

Ejemplo 1:

El lanzamiento de un dado no trucado supone que los sucesos son equiprobables. Sea el suceso A : sale un cuatro, entonces $P(A) = 1/6$, como ejemplo de un suceso compuesto. Sea el suceso B : sale un número par, entonces $P(B) = 0,5$, puesto que hay tres casos favorables $\{ 2, 4, 6 \}$ de los seis casos posibles $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

Ejemplo 2:

La extracción de tres fichas al azar y sin sustitución, de una caja que contiene 6 fichas rojas (R), 4 blancas (B) y 5 azules (A):

En primer lugar, el espacio muestral equiprobable S , de este experimento, está constituido por ternas, como por ejemplo $\{R, R, A\}$, $\{B, B, B\}$, $\{R, B, A\}$, etc. Que no es necesario expresar por extensión ya que posee muchos elementos y lo que interesa es la cantidad de ternas y no cuáles son esas ternas.

⁹ Equiprobable significa que todos los sucesos son igualmente probables.

Luego, S es el conjunto de todas las *combinaciones*¹⁰ posibles de 15 fichas tomadas de a 3. Por lo tanto, la cantidad de ternas que tiene S , o lo que es lo mismo el cardinal de S , es: $\#S = \binom{15}{3} = 455$

En segundo lugar, hay algunas probabilidades típicas que se pueden calcular en este espacio muestral.

a) La probabilidad de que las tres fichas sean blancas. El suceso A es $A = \{B, B, B\}$. El resultado de las combinaciones de 4 fichas blancas tomadas de a tres es $\binom{4}{3} = 4$. Por lo tanto, la probabilidad de A se calcula como $P(A) = \frac{4}{455}$

b) La probabilidad de sacar una ficha de cada color. El suceso A está constituido por ternas que tienen la forma $\{A, B, R\}$. Las combinaciones de 6 fichas rojas tomadas de a una son $\binom{6}{1} = 6$, para las blancas son $\binom{4}{1} = 4$ y para las azules $\binom{5}{1} = 5$. Por lo tanto, la probabilidad de A es $P(A) = \frac{6 \cdot 4 \cdot 5}{455} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$.

c) La probabilidad de sacar dos fichas rojas y una azul. El suceso A está constituido por ternas de la forma $\{A, R, R\}$. Las combinaciones de 6 fichas rojas tomadas de a dos son $\binom{6}{2} = 15$; para la azul, $\binom{5}{1} = 5$. Por lo tanto, la probabilidad de A se calcula como $P(A) = \frac{15 \cdot 5}{455} = \frac{75}{455} = \frac{15}{91}$.

d) La probabilidad de que al menos una ficha sea roja. El suceso A está constituido por ternas de la forma $\{R, B, A\}$ o $\{R, R, B\}$, etc. El complemento del suceso “al menos una ficha roja (1 o 2 o 3)” es “ninguna ficha roja (\bar{A})”. Por lo tanto, conviene calcular la probabilidad de A como $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ y la probabilidad de \bar{A} son las 3 fichas no rojas que se pueden elegir de entre las 9 fichas que son blancas o azules. $P(\bar{A}) = \frac{\binom{9}{3}}{455} = \frac{84}{455} = \frac{12}{65}$. Por lo tanto,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

¹⁰ Análisis Combinatorio.

$$P(A) = 1 - \frac{12}{65} = \frac{53}{65}$$

e) La probabilidad de que a lo sumo dos fichas sean rojas. El suceso A está constituido por ternas de la forma {B, A, A}, {R, B, B}, {R, R, A}, etc. El suceso “a lo sumo dos fichas rojas” equivale a los sucesos “ninguna ficha roja (B)” o “una ficha roja (C)” o “dos fichas rojas (D)”.

$$P(B) \text{ es lo mismo que en el inciso anterior. } P(B) = \frac{\binom{9}{3}}{455} = \frac{84}{455} = \frac{12}{65}$$

$$P(C) = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{1}}{455} = \frac{36 \cdot 6}{455} = \frac{216}{455} \text{ y } P(D) = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{6}{2}}{455} = \frac{9 \cdot 15}{455} = \frac{135}{455} = \frac{27}{91} \text{ por lo tanto,}$$

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$$

$$P(A) = \frac{12}{65} + \frac{216}{455} + \frac{27}{91} = \frac{87}{91}$$

Otra forma de resolver el inciso es considerando que el suceso “a lo sumo dos fichas rojas (o sea que pueden ser 0 o 1 o 2 ‘fichas rojas) tiene por complemento el suceso “las tres fichas son rojas (\bar{A})”

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \text{ y } P(\bar{A}) = \frac{\binom{6}{3}}{455} = \frac{20}{455} = \frac{4}{91}$$

$$P(A) = 1 - \frac{4}{91}$$

$$P(A) = \frac{87}{91}$$

A veces, sucesos que parecen equiprobables no lo son. Por ejemplo, si se estudia una ruleta en particular durante el tiempo suficiente, se comprueba que no todos los números son equiprobables. Esto ocurre debido a pequeñas imperfecciones en la propia ruleta. Por esta causa, los casinos no permiten la entrada a los jugadores que anotan sistemáticamente los resultados de sus ruletas ya que estos jugarían con ventaja si se conociera bien su comportamiento.

3.2. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA¹¹ DE PROBABILIDAD

Nótese que las definiciones anteriores presentan dificultades puesto que, o se necesita repetir un gran número de veces el experimento o bien se necesita la seguridad de que los sucesos son todos equiprobables (lo cual no siempre es obvio). Por estos motivos se utiliza la siguiente definición de probabilidad.

Definición:

Sea E un experimento aleatorio con un espacio muestral S , sea A un suceso cualquiera del espacio muestral se define la probabilidad $P(A)$ como una función real que hace corresponder a cada suceso A un número real de forma tal que se cumplan los tres siguientes axiomas:

a) Para cada A $P(A) \geq 0$, es decir, la probabilidad de cualquier suceso es mayor o igual que cero.

b) Para el suceso seguro S , $P(S) = 1$.

c) Dados dos sucesos A y B mutuamente excluyentes $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

El último axioma significa que la probabilidad del suceso unión de dos sucesos mutuamente excluyentes es la suma de las probabilidades de ambos sucesos. Esto se puede generalizar a cualquier número de sucesos mutuamente excluyentes.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Los tres axiomas de la definición anterior constituyen la base sobre la que se puede construir toda la teoría del cálculo de probabilidades. Nótese que los axiomas anteriores son coherentes con la definición de la probabilidad basada en las frecuencias relativas de un gran número de experimentos.

¹¹ Axiomático: relacionado con axioma. Un axioma es una proposición o enunciado tan evidente que se considera que no requiere demostración alguna.

Una consecuencia de la definición axiomática de probabilidad es que si en un espacio muestral finito S con n puntos muestrales se conoce la probabilidad P_i de cada suceso elemental de S que satisfacen las condiciones,

a) $P_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ y b) $\sum_{i=1}^n P_i = 1$, entonces todo suceso A tiene asignada una probabilidad que se puede deducir a partir de los sucesos elementales, pues A siempre se puede expresar como la unión de sucesos elementales y estos por definición son mutuamente excluyentes.

Ejemplo 1:

Sea $S = \{a, b, c, d\}$ tal que $P(a) = \frac{1}{6}$, $P(b) = \frac{1}{5}$, $P(c) = \frac{1}{3}$, y $P(d) = \frac{3}{10}$. La función de probabilidad P está bien definida ya que se cumple: $P_i \geq 0 \quad \forall x_i \in S$ y $\sum_{i=1}^4 P(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = 1$. Si el suceso A es $A = \{a, d\}$ se puede establecer que $P(A) = P(a) + P(d) = \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{14}{30}$.

Ejemplo 2:

Sea $S = \{1, 2, 3\}$ tal que $P(1) = \frac{1}{10}$, $P(\{1, 2\}) = \frac{2}{5}$ y $P(3) = \frac{3}{5}$. La función de probabilidad P está bien definida ya que $P(1) = \frac{1}{10}$, $P(2) = P(\{1, 2\}) - P(1) = \frac{3}{10}$, y $P(3) = \frac{3}{5}$, todos mayores que cero y además $\sum_{i=1}^3 P(x_i) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{5} = 1$.

Ejemplo 3:

Sean $S = \{1, 2, 3\}$ tal que $P(\{1, 2\}) = \frac{2}{5}$ y $P(3) = \frac{3}{5}$. En este caso no es una función de probabilidad, porque no se puede determinar a partir de las condiciones dadas $P(1)$, $P(2)$, $P(\{1, 3\})$ ni $P(\{2, 3\})$.

3.3. PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

A partir de la definición axiomática se pueden deducir algunas propiedades importantes de la probabilidad. Estas propiedades son útiles para calcular la probabilidad de sucesos a partir de las probabilidades conocidas de otros sucesos más sencillos, cumpliendo así el propósito de toda propiedad: simplificar el cálculo.

Se enunciarán estas propiedades como teoremas.

Teorema 1:

La probabilidad de que no ocurra el suceso A es: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración:

Se sabe que $S = A \cup \overline{A}$ y $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Luego $P(S) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$ por los axiomas b) y c). De la última igualdad se puede despejar $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ quedando demostrado el teorema.

Ejemplo:

Sea el experimento lanzar un dado no trucado y sea el suceso A: sale 6. Entonces se sabe que $P(A) = \frac{1}{6}$, por lo tanto \overline{A} : No sale 6 y $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}$

Este último resultado es el mismo que se obtiene al hacer el cociente entre casos favorables (5) y casos posibles (6).

Teorema 2:

La probabilidad del suceso imposible es cero. $P(\emptyset) = 0$

Demostración:

Se sabe que $\overline{S} = \emptyset$, por lo tanto $P(\emptyset) = P(\overline{S})$ y por el teorema 1 se puede escribir esto último como $P(\emptyset) = P(\overline{S}) = 1 - P(S)$. Por el axioma b) se tiene

que $P(S) = 1$ Por lo tanto se tiene, finalmente, que $P(\emptyset) = P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$ quedando demostrado así que $P(\emptyset) = 0$

Teorema 3:

La probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B se puede calcular como: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración:

Se sabe que $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$ y $B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$.

Luego $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$ y $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$. En ambos casos por el axioma c).

De la última igualdad se deduce que $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$.

Reemplazando esto en la primera igualdad.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ que es lo que se quería demostrar.}$$

Nótese que en el caso particular de que los sucesos A y B fuesen mutuamente excluyentes ($A \cap B = \emptyset$) este teorema se reduciría al axioma c).

Ejemplo:

Calcular la probabilidad de obtener un número par o un número mayor que tres al lanzar un dado no cargado.

A: obtener un número par $\{2, 4, 6\}$, entonces $P(A) = \frac{1}{2}$

B: obtener un número mayor que tres: $\{4, 5, 6\}$, entonces $P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{4, 6\}$, entonces $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ Por lo tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Obsérvese que es el resultado esperado ya que los números pares o mayores que tres son $\{2, 4, 5, 6\}$, por lo tanto su probabilidad será $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

El resultado de este teorema se puede generalizar para la unión de más de dos sucesos. En el caso de tres sucesos A, B y C se tendría

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Teorema 4:

La probabilidad de que entre dos sucesos A y B ocurra solo A, es:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Demostración:

$A = A \cap S$ por ser S el espacio muestral y A un evento de él.

$A = A \cap (B \cup \overline{B})$ por ser $S = B \cup \overline{B}$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ por propiedad distributiva de la intersección de conjuntos.

Como los sucesos $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son mutuamente excluyentes, se tiene

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \text{ despejando } P(A \cap \overline{B})$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B), \text{ que es lo que se quería demostrar.}$$

Teorema 5:

La probabilidad de que no ocurra el suceso A ni ocurra el suceso B, es:

$$a) P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) \quad b) P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$$

Demostración:

a) La ley de De Morgan en teoría de conjuntos establece que:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Luego,

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$ por el teorema 1. Y esto es lo que se quería demostrar.

La parte b) se demuestra de manera similar.

Corolario:

La probabilidad de que ocurra al menos uno de entre varios sucesos es igual a 1 menos la probabilidad de que no ocurra ninguno de ellos.

Para el caso de dos sucesos $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Para el caso de tres sucesos $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

Teorema 6:

La probabilidad del suceso A, que está incluido en el suceso B ($A \subseteq B$), es menor que la probabilidad que este último. Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Demostración:

Si $A \subseteq B$, entonces $B = A \cup (B \cap \overline{A})$ luego $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$

Como $P(B \cap \overline{A}) \geq 0$ es $P(A) \leq P(B)$ que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 1:

Dados $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ se puede establecer que:

a) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ por el teorema 1.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{19}{30}$ por el teorema 3.

c) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ por el teorema 4.

d) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ por el teorema 5 inciso b)

e) $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{7}{10}$ por el teorema 3.

Ejemplo 2:

En un vivero, una planta puede tener una enfermedad A con probabilidad $\frac{1}{5}$, otra enfermedad B con probabilidad $\frac{2}{7}$ y la enfermedad A o la enfermedad B o ambas con probabilidad $\frac{3}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de que una planta cualquiera tenga:

- ambas enfermedades?
- solo la enfermedad B?
- no esté enferma?

Del enunciado se puede establecer que: $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$.

a) El teorema 3 establece: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ de donde trasponiendo términos se deduce que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{35}$ es decir que la probabilidad de que una planta tenga ambas enfermedades es de $\frac{2}{35}$.

b) Lo que se debe calcular es $P(\overline{A} \cap B)$, es decir que no tenga la enfermedad A y tenga la enfermedad B. Por lo tanto,

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ por el teorema 4.

$P(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{7} - \frac{2}{35} = \frac{8}{35}$, es decir que la probabilidad de que una planta solo tenga la enfermedad B es de $\frac{8}{35}$.

c) Que la planta no esté enferma significa que no tiene ni la enfermedad A ni la enfermedad B, es decir calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

El teorema 5 inciso a) establece que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

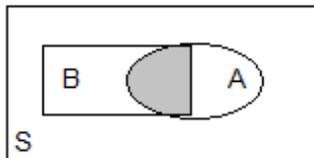
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$, es decir que la probabilidad de que la planta no esté enferma es de $\frac{4}{7}$.

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA

En muchas ocasiones interesa conocer la probabilidad de un suceso A en el caso de que se haya cumplido otro suceso B. A esta probabilidad de que se cumpla A bajo la condición de que se haya cumplido B, se la llama *probabilidad de A condicionada a B* y se denota por $P(A | B)$.

Definición:

Dados dos sucesos cualesquiera A y B asociados a un espacio muestral S, se define la probabilidad del suceso A condicionado a B, $P(A|B)$, como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Como es lógico, esta definición tiene sentido si $P(B) > 0$. Al calcular la probabilidad condicionada se sustituye el espacio muestral S por el suceso B, de modo que, haciendo corresponder probabilidades a áreas en el espacio muestral, $P(A | B)$ será la fracción del nuevo espacio muestral B en que ocurre A.



$P(A | B)$ significa que se está calculando la probabilidad de A referida al espacio muestral reducido B, en vez de referida al espacio muestral original S. Destáquese que si las probabilidades están condicionadas a un suceso cualquiera, entonces tal suceso pasa a tener formalmente las características de un espacio muestral reducido en relación al espacio original S, de modo que todas las propiedades de las probabilidades que se cumplen en S son también válidas en el espacio reducido. De hecho, cuando se plantea la probabilidad de un suceso A, $P(A)$, es totalmente concordante a denotarla como $P(A | S)$.

Como consecuencia de la observación anterior es posible demostrar las siguientes propiedades.

$$a) P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

$$b) P(\overline{A}|\overline{B}) = 1 - P(A|\overline{B})$$

$$c) P((A \cup C) | B) = P(A | B) + P(C | B) - P((A \cap C) | B)$$

$$d) P((A \cap \overline{C}) | B) = P(A | B) - P((A \cap C) | B)$$

Ejemplo 1:

Se lanza un dado no cargado, si el resultado es par ¿cuál es la probabilidad de que el número sea 6?

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; A: el número es un 6 $\{6\}$; B: el número es par $\{2, 4, 6\}$.

$$A \cap B = \{6\}, \text{ por lo tanto } P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{ y } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

La forma de calcular esta probabilidad sin aplicar la definición, es considerando el espacio muestral reducido B, o sea que $B = \{2, 4, 6\}$ y a partir de allí calcular la probabilidad de que el número sea 6. Es decir $P(A | B) = \frac{1}{3}$

Ejemplo 2:

El lanzamiento de un par de dados no cargado. Si la suma es 6, encontrar la probabilidad de que uno de los dados tenga un dos.

$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$ 36 elementos.

B: la suma de los dados es 6, $B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ 5 elementos

A: uno de los dados es 2, $A = \{(2, 4), (4, 2)\}$ 2 elementos

$$A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

En forma directa $P(A|B) = \frac{2}{5}$, es decir, teniendo en cuenta que el espacio reducido es B con 5 elementos (casos posibles) y el evento A tiene dos elementos (casos favorables).

Ejemplo 3:

Si $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, entonces

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

4.1. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

La definición de probabilidad condicionada permite calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos –cuestión que aún no se sabía cómo– es decir la probabilidad de que dos sucesos ocurran en forma simultánea.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ por lo tanto}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) \text{ o bien } P(A \cap B) = P(B|A) P(A)$$

De esta forma, la probabilidad de que tanto el suceso A como el B ocurran es igual a la probabilidad de que A ocurra dado que B haya ocurrido, multiplicado por la probabilidad de que ocurra B. Esto se puede generalizar a la intersección de más de dos sucesos. En el caso particular de 3 sucesos:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) P(B \cap C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) P(B|C) P(C)$$

Un caso importante es cuando se cumple: $P(A|B) = P(A)$

En este caso la probabilidad de que ocurra A no está afectada por la ocurrencia de B y se dice que los dos sucesos son *independientes*. Esto se puede observar si en $P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$ se hace cumplir la última condición enunciada:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Es decir, la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes –la probabilidad de que ocurran ambos sucesos– es igual al producto de sus probabilidades. Esta última relación se toma usualmente como condición necesaria y suficiente para la existencia de independencia.

Definición:

Se dice que dos sucesos A y B asociados a un espacio muestral S son sucesos independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Los sucesos A y B son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$

La condición de independencia entre dos sucesos establece que la ocurrencia de uno de ellos no altera la probabilidad de ocurrencia del otro. Esta condición se puede aplicar en dos direcciones. La más frecuente ocurre cuando mediante un simple razonamiento basado en las condiciones en las que se realiza el experimento permite deducir que los sucesos A y B son independientes, entonces se aplica $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. La otra dirección ocurre cuando es difícil establecer a priori que los sucesos son independientes, entonces si es posible establecer que se cumple $P(A \cap B) = P(A) P(B)$, se deduce que A y B son sucesos independientes.

El concepto de independencia se puede generalizar a n sucesos. Se dice que los n sucesos son mutuamente independientes cuando cualquier pareja de sucesos es independiente y la probabilidad de la intersección de cualquier número de sucesos independientes es el producto de sus probabilidades. En el caso de tres sucesos independientes:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$$

Cuando no se cumple $P(A|B) = P$, hay que utilizar $P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$ para calcular la probabilidad de la intersección. En este caso se dice que los

sucesos son *dependientes*, es decir, la probabilidad de que ocurra uno de ellos depende de que haya ocurrido o no el otro.

Ejemplo 1:

En el ejemplo ya planteado anteriormente (en un vivero, una planta puede tener una enfermedad A con probabilidad $\frac{1}{5}$, otra enfermedad B con probabilidad $\frac{2}{7}$ y la enfermedad A o la enfermedad B, o ambas, con probabilidad $\frac{3}{7}$), no se puede establecer *a priori*¹² si las enfermedades A y B

son o no independientes, pero del enunciado se establece que: $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$

Por el teorema 3 se sabe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ de donde

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{35}$$

Por otro lado $P(A)P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{35}$.

Obsérvese que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, por lo tanto se puede afirmar que los sucesos son independientes; el que una planta tenga la enfermedad A es independiente de que contraiga la enfermedad B y viceversa. En otras palabras, el que una planta tenga una enfermedad no afecta el que contraiga la otra.

Ejemplo 2:

Si $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ¿son independientes los sucesos A y B?

Si los sucesos son independientes se debe cumplir que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

¹² *A priori* es una locución latina que se refiere a aquello que se realiza con anterioridad a la reflexión sobre el asunto en cuestión.

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{5} \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{6} \neq \frac{4}{15}$ En consecuencia, los sucesos no son independientes.

Ejemplo 3:

El mecanismo que acciona una línea de embalaje en una exportadora depende de dos subsistemas independientes, A y B con probabilidad de falla de $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{15}$ respectivamente, durante un día cualquiera. La línea deja de funcionar si fallan simultáneamente ambos subsistemas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera:

a) la línea se detenga?

Para que esto ocurra deben fallar ambos subsistemas, que corresponde a

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) = \frac{1}{10} \frac{1}{15} = \frac{1}{150}$$

b) falle solo el subsistema A? Esto se calcula aplicando el teorema 4.

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} - \frac{1}{150} = \frac{7}{75}$$

c) la línea funcione?

Esto ocurriría si al menos un subsistema funciona. Por el teorema 5, inciso b)

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) P(B) = 1 - \frac{1}{150} = \frac{149}{150}$$

4.2. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

En muchas ocasiones resulta difícil calcular directamente la probabilidad de un suceso, pero puede lograrse a partir de la probabilidad de ocurrencia de una serie de otros sucesos. Esto conduce a lo que se conoce como probabilidad total.

Previamente se recordará la definición de partición de un conjunto pero adaptada a un espacio muestral.

Definición:

Se llama *partición de un espacio muestral S* a una serie de k sucesos B_i que cumplen las siguientes condiciones:

a) $B_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$

b) $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$

c) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = S$ lo que también se expresa como $\bigcup_{i=1}^k B_i$

Nótese que los sucesos son no vacíos y mutuamente excluyentes entre ellos, es decir no tienen elementos en común y, además, la unión de todos ellos es el espacio muestral.

Un ejemplo de partición es un rompecabezas, ya que cada pieza es un subconjunto del cuadro completo.

Teorema de la probabilidad total:

Sea el suceso A del espacio muestral S y $\{B_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ una partición de S , entonces se puede establecer que $P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \mid B_i) P(B_i)$ con $P(B_i) > 0 \quad \forall i$

Demostración:

Para demostrar el teorema se aplican las condiciones de partición de un espacio muestral y se expresa el suceso A como

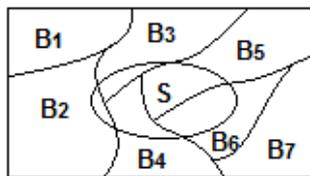
$$A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) = \bigcup_{i=1}^k (A \cap B_i)$$

Al ser los sucesos B_i disjuntos, también lo son los diferentes $(A \cap B_i)$, de forma que la probabilidad de A usando $P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$ se puede expresar:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^k P(A \mid B_i) P(B_i) \quad \text{que es lo que se quería demostrar.}$$

Siguiendo con la analogía del rompecabezas, si el suceso A a que hace referencia el teorema lo asimilamos a la figura central de este, se tendrá que algunas piezas contienen parte de la figura central, no importa que la mayoría de las piezas no contribuyan a su formación, lo que equivale a decir que algunas $A \cap B_i$ son vacías; lo fundamental es que al armar el compecabezas completo, la figura central quedará completa.

El siguiente gráfico puede ayudar a comprender la demostración del teorema.



Ejemplo 1:

Supóngase que en unas elecciones las probabilidades de que ganen tres partidos políticos B_1 , B_2 y B_3 son 0,5; 0,3 y 0,2, respectivamente. Si gana B_1 , la probabilidad de que suban los impuestos es 0,8; mientras que para los casos que salgan elegidos B_2 y B_3 es 0,2 y 0,5, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que suban los impuestos?

Los tres partidos políticos conforman el espacio muestral S y $\{B_1, B_2, B_3\}$ conforman una partición de S puesto que son no vacíos, disjuntos dos a dos y además $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Por otro lado, se sabe que $P(B_1) = 0,5$; $P(B_2) = 0,3$ y $P(B_3) = 0,2$

Sea el suceso A : suben los impuestos.

$$P(A | B_1) = 0,8; \quad P(A | B_2) = 0,2 \quad \text{y} \quad P(A | B_3) = 0,5$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A | B_i) P(B_i)$$

$$P(A) = P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + P(A | B_3) P(B_3)$$

$$P(A) = 0,8 * 0,5 + 0,2 * 0,3 + 0,5 * 0,2 = 0,56$$

Ejemplo 2:

Una automotriz fabrica tres tipos de coches B_1 , B_2 y B_3 con una proporción de cada tipo de $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$, respectivamente. La probabilidad de que un coche tipo B_1 se averíe en el primer año es 0,07; la de que se averíe uno del tipo B_2 es 0,04; y del tipo B_3 , es 0,09. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A: un coche producido en esa fábrica tenga una avería antes de un año?

El espacio muestral S es la producción total de esa fábrica, por lo tanto, $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$A = A \cap F$$

$$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$$

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

$$P(A) = P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + P(A | B_3) P(B_3)$$

$$P(A) = 0,07 * \frac{2}{5} + 0,04 * \frac{1}{2} + 0,09 * \frac{1}{10} = 0,057$$

TRABAJO PRÁCTICO: PROBABILIDAD

1. Indicar cuáles de los siguientes experimentos no son aleatorios. Justificar la respuesta.

- a) Lanzar un dado y obtener un número par.
- b) Bajar y subir desde el segundo piso a la planta baja en ascensor.
- c) Tirar una moneda al aire y anotar si sale cara o sello.
- d) En una caja hay cinco fichas amarillas, se saca una ficha y se anota el color.
- e) Hacer girar la flecha de una ruleta de cuatro colores y anotar el color que sale.
- f) Extraer una carta de una baraja y observar si es un as.

2. Sea el experimento aleatorio: lanzar tres monedas al aire.

- a) Enumerar los elementos que constituyen el espacio muestral S .
- b) Enumerar los elementos que constituyen los siguientes eventos:
A: "Obtener dos caras y un sello", B: "Obtener al menos dos caras", C: "Obtener al menos un sello".
- c) Describir los siguientes eventos y enumerar sus elementos: $B \cap C$ y \overline{C} .

3. En una urna hay 15 fichas numeradas del 2 al 16. Se extrae una ficha al azar y se observa el número que tiene.

- a) Enumerar los elementos que constituyen los siguientes eventos:
A: "Obtener un número par"; B: "Obtener un número impar"; C: "Obtener un número primo" y D: "Obtener un número impar menor que nueve".
- b) Establecer la relación que hay entre los sucesos A y B y entre los sucesos C y D.

4. a) ¿Cuál es la probabilidad de que un número entero elegido al azar, entre los 100 primeros enteros positivos, sea impar?

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un día al año seleccionado al azar –de entre los 360 posibles– sea de abril?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos al tirar dos dados sea par?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar una moneda seis veces al aire se obtenga cara las seis veces?

5. Una urna contiene 12 fichas amarillas, 15 fichas verdes y 23 azules. Calcular la probabilidad de que al extraer una ficha al azar

- a) sea de color azul,
 b) sea de color amarillo,
 c) no sea de color amarillo,
 d) no sea de color verde.

6. Se lanzan dos dados no cargados y se suman los números. Calcular la probabilidad de que

- a) La suma sea 6,
 b) la suma sea un número impar,
 c) salga un número igual y par en cada dado,
 d) salgan números menores que cinco en cada dado.

7. a) Se lanzan 1.000 veces un dado, los resultados obtenidos son los siguientes.

Cara	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	169	165	166	172	160	168

- i) Calcular las frecuencias relativas de cada suceso.
- ii) Estimar la probabilidad de obtener un 6 con ese dado, y la de obtener un 4.
- b) Al extraer al azar 1.000 veces una ficha de una caja en donde hay 10 fichas numeradas del 1 al 10 se obtuvieron los siguientes resultados.

Ficha	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	99	96	102	93	101	105	101	102	103	98

i) Calcular las frecuencias relativas de cada suceso.

ii) Estimar la probabilidad de extraer un 7 y la de extraer un 10.

8. a) Una lotería reparte un premio millonario a la persona que acierte un conjunto de seis números escogidos entre los n primeros enteros positivos, donde n es un número entre 30 y 60. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona acierte los seis números, sin importar el orden, si n es 40?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona acierte los seis números, sin importar el orden, si n es 50 o 56 o 60?

9. En una caja hay 10 baterías de las cuales 4 están en buen estado. Se extraen al azar dos baterías sin devolverlas a la caja. Encontrar la probabilidad de que

a) ambas estén en buen estado.

b) solamente una esté en buen estado.

c) si se extraen tres baterías sin devolverlas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres estén en buen estado?

10. a) ¿Cuáles son las funciones, definidas en $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, que hacen de S un espacio de probabilidad? Justificar la respuesta.

i) $P(a_1) = \frac{1}{3}; P(a_2) = \frac{1}{3}; P(a_3) = \frac{1}{2};$

ii) $P(a_1) = \frac{1}{3}; P(a_2) = \frac{1}{3}; P(a_3) = \frac{1}{3};$

iii) $P(a_1) = \frac{1}{3}; P(a_2) = \frac{1}{6}; P(a_3) = \frac{1}{2};$

iv) $P(a_1) = \frac{1}{2}; P(a_2) = \frac{3}{8}; P(a_3) = \frac{1}{4};$

b) Sea P una función de probabilidad en $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Encuentre $P(a_1)$ si:

$$\text{i) } P(a_2) = \frac{1}{6}; \quad P(a_3) = \frac{2}{5}; \quad P(a_4) = \frac{4}{15}$$

$$\text{ii) } P(a_2) = \frac{3}{7}; \quad P(a_3) = \frac{2}{5}; \quad P(a_4) = \frac{1}{10}$$

11. Demostrar

$$\text{a) } P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$\text{b) Si } P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

12. Plantear y resolver los siguientes problemas.

a) El 30% de los estudiantes de un colegio practica fútbol, el 40% practica básquet y el 10% ambos deportes. Si se elige un estudiante al azar, calcular:

i) la probabilidad de que no juegue ni al fútbol ni al básquet.

ii) si juega al fútbol ¿cuál es la probabilidad de que juegue al básquet?

iii) ¿los eventos “jugar al fútbol” y “jugar al básquet” son independientes?

b) En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2.500 personas para saber la audiencia que tuvieron un debate y una película que se emitieron en horas distintas, 2.100 personas vieron la película, 1.500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos un encuestado al azar:

i) ¿cuál es la probabilidad de que haya visto la película y el debate?

ii) ¿cuál es la probabilidad de que haya visto la película, sabiendo que vio el debate?

iii) sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que haya visto el debate?

13. Sean los eventos A y B tal que

a) $P(A) = 0,4$; $P(\overline{A} \cap B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,1$. Calcular $P(A \cup B)$ y $P(B)$.

b) $P(\overline{B}) = 0,7$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,2$. Calcular $P(A \cup B)$ y $P(A)$.

c) $P(\overline{A}) = 0,48$, $P(A \cup B) = 0,82$ y $P(B) = 0,42$. ¿A y B son independientes?
¿Cuánto vale $P(A | B)$?

d) $P(A) = 0,4$, $P(B | A) = 0,25$ y $P(\overline{B}) = 0,75$. ¿A y B son independientes?
¿Cuánto vale $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$?

14. a) Una fábrica de tornillos tiene dos máquinas, la M_1 , que es más antigua y hace el 75% de todos los tornillos y la M_2 , más nueva pero pequeña, que hace el 25% de los tornillos. La M_1 hace un 4% de tornillos defectuosos, mientras que la M_2 tan sólo hace un 2% de tornillos defectuosos. Si escogemos un tornillo al azar, ¿qué probabilidad hay de que salga defectuoso?

b) Se dispone de tres cajas con celulares. La primera contiene 10 celulares, de los cuales hay cuatro defectuosos; en la segunda hay seis celulares, estando uno de ellos defectuoso, y en la tercera caja hay tres celulares defectuosos de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un celular al azar, de una de las cajas, esté defectuoso?

c) Una empresa recibe lotes de material de tres proveedores A, B, y C en proporciones del 50%, 30% y 20%, respectivamente. Además, se sabe que el 0,1% de los lotes del proveedor A, 0,5% de los del B y 1% de los del C son rechazados en el control de calidad que realiza la empresa a la recepción del material. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de material sea rechazado?

AUTOEVALUACIÓN: PROBABILIDADES

1. Responder, con tinta, Verdadero o Falso, NO justificar la respuesta.

a) Se llama espacio muestral a todos los resultados posibles de un experimento cualquiera.

b) Sea $S = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$ un espacio muestral, entonces (c, s) es un suceso elemental.

c) Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral. $A \cap \bar{B}$ significa que solo ocurre A.

d) En todo espacio muestral se define la probabilidad de un suceso A como

$$P(A) = \frac{a}{N} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

e) La probabilidad de que no ocurra el suceso A es: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. Completar con la respuesta correcta. Responder con tinta.

a) Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, “no ocurre el suceso A ni el suceso B” se expresa simbólicamente como.....

b) Se lanza un dado no cargado, la probabilidad de que salga un n° primo es.....

c) Sea $S = \{a, b, c, d\}$ para que la función de probabilidad P esté bien definida, se debe cumplir que $P(a) = \dots\dots\dots$, $P(b) = \dots\dots\dots$, $P(c) = \dots\dots\dots$

$P(d) = \dots\dots\dots$

d) Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, entonces

$P(A \cup B) = \dots\dots\dots$

e) Se lanza un dado no cargado, si el número que sale es par, la probabilidad de que ese número no sea primo es.....

3. Escribir en el recuadro y con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) La probabilidad de que entre dos sucesos A y B ocurra solo A, es:

A) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ B) $P(A \cap \overline{B}) = P(B) - P(A \cap B)$

C) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cup B)$ D) $P(A \cup \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

b) Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S, entonces $P(A|B)$ es igual a:

A) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ B) $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ C) $\frac{P(A \cup B)}{P(B)}$ D) $\frac{P(A \cup B)}{P(A)}$

c) La probabilidad de que el 1 preceda al 4 cuando se elige al azar una permutación de { 1, 2, 3, 4 } es:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{4}{10}$ C) $\frac{1}{24}$ D) $\frac{1}{2}$

d) La probabilidad de que una cadena de 4 bits generada aleatoriamente contenga al menos 2 ceros consecutivos si se sabe que el primer bit es un 1, es de:

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

e) Sea E el suceso de que una cadena de 4 bits generada aleatoriamente comience con un 1 y F el suceso de que dicha cadena tenga un número par de unos, entonces E y F son sucesos:

- A) Independientes B) Dependientes
C) No se puede determinar la independencia

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN: PROBABILIDADES

Para cada uno de los siguientes enunciados, escribir el programa o subrutina solicitado.

1. Ingresar las opciones de “dos dados” o “tres dados”. Para la primera opción mostrar el espacio muestral y la opción de calcular la probabilidad de al menos 10 eventos distintos. Para la segunda opción, mostrar la opción de calcular la probabilidad de al menos 20 eventos distintos.

2. Para el experimento aleatorio “Extracción de tres fichas al azar y sin sustitución, de una caja que contiene 6 fichas rojas, 4 blancas y 5 azules”, mostrar el espacio muestral y la posibilidad de calcular al menos la probabilidad de 15 eventos distintos.

3. Para el experimento aleatorio “Lanzar dos dados”, mostrar el espacio muestral y al menos 5 condiciones respecto de los dados; mostrar la posibilidad de calcular la probabilidad de al menos 3 sucesos condicionados a cada una de las posibilidades anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

Disset, L. (2004). *Apuntes de Clases – Matemática Discreta*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile.

Gorgas García, J.; Cardiel López, N. y Zamorano Caalvo, J. (2011). *Estadística Básica para estudiantes de ciencias*. Departamento de Astrofísica y Ciencias de la Atmósfera. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense de Madrid.

Jiménez Murillo, J. (2011). *Matemática para la computación*. (Primera edición). México: Alfa Omega Grupo editor S. A.

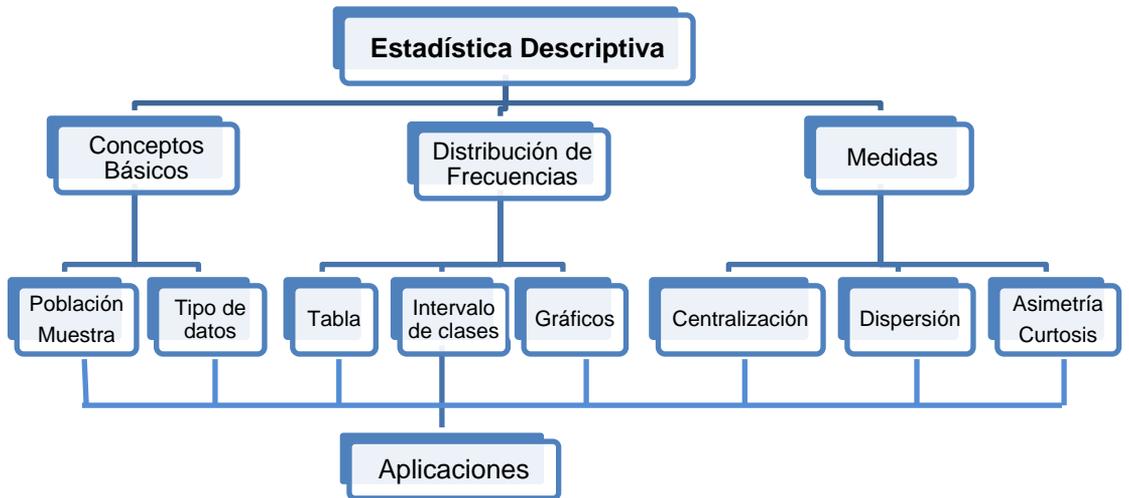
Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. (Sexta edición). (Traducción de Gonzales Osuna, M.). México: Pearson Educación Prentice Hall.

Kolman, B.; Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de Matemáticas discretas para la Computación*. (Tercera edición). (Traducción de Palmas Velasco, O.). México: Prentice – Hall Hispanoamericana S. A.

Rosen, K. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (Quinta edición). (Traducción Pérez Morales y otros). España: Mc Graw Hill.

Rustom, A. J. (2012). *“Estadística descriptiva probabilidad e inferencia”. Una visión conceptual y aplicada*. Departamento de Economía Agraria. Facultad de Ciencias Agronómicas. Universidad de Chile. Santiago de Chile.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA



OBJETIVOS

- ✓ Comprender y dominar los conceptos básicos de estadística descriptiva.
- ✓ Adquirir aptitudes para aplicar eficazmente conceptos y procedimientos estadísticos en el planteamiento y la resolución de problemas propios de la informática.
- ✓ Conocer y utilizar software específico para analizar, modelar, manipular y diseñar soluciones para una gran cantidad de datos.
- ✓ Conocer las técnicas descriptivas de clasificación y obtención de información a través de parámetros característicos de la muestra o población analizada.
- ✓ Conocer y utilizar adecuadamente el lenguaje estadístico.
- ✓ Asumir la necesidad y utilidad de la Estadística como herramienta en su ejercicio profesional.
- ✓ Sintetizar y describir una gran cantidad de datos seleccionando los estadísticos adecuados al tipo de variables y analizar las relaciones existentes entre ellas.

Estadística Descriptiva

1. INTRODUCCIÓN

La Estadística es la ciencia de los datos, ya que se encarga de recogerlos, organizarlos e interpretarlos. La vida diaria está compuesta por datos estadísticos: encuestas electorales, economía, deportes, datos meteorológicos, calidad de los productos, audiencias de televisión, etc. Por lo tanto, se hace necesario una formación básica en Estadística para evaluar toda esta información.

La utilidad de la Estadística va mucho más allá de estos ejemplos, ya que es fundamental para muchas ramas de la ciencia, desde las Ciencias Sociales hasta la Ingeniería. Pero sobre todo es una herramienta de trabajo profesional. En un principio, la Estadística se ocupaba sobre todo de la descripción de los datos, fundamentalmente sociológicos, demográficos y económicos (censos de población, producciones agrícolas, riquezas, etc.), principalmente por razones fiscales. En el siglo XVII, el cálculo de probabilidades se consolida como disciplina independiente, aplicándose sobre todo a los juegos de azar. Luego, en el siglo XVIII el uso de la Estadística se extiende a problemas físicos (principalmente de Astronomía) y actuariales (seguros marítimos). Posteriormente, se hace imprescindible en la investigación científica y es esta la que la hace avanzar. Finalmente, en el siglo XIX, nace la Estadística como ciencia.

Actualmente, la Estadística está tan difundida y sus méritos tan aceptados que prácticamente no existe actividad que no la utilice de una u otra manera, a tal punto que cualquier investigación que genere datos y no la utilice en la forma adecuada para su análisis, corre el riesgo de que sus conclusiones no sean consideradas científicamente válidas.

2. CONCEPTOS BÁSICOS

El tratamiento estadístico tiene básicamente dos fases: la organización y análisis inicial de los datos recogidos y la extracción de conclusiones válidas y toma de decisiones razonables a partir de ellos.

Los objetivos de la Estadística Descriptiva son los que se abordan en la primera de estas fases. Es decir, su misión es ordenar, describir y sintetizar la información recogida. En este proceso, será necesario establecer medidas cuantitativas que reduzcan a un número manejable de parámetros del conjunto (en general grande) de datos obtenidos.

La elaboración de gráficas (visualización de los datos en diagramas) también forma parte de la Estadística Descriptiva dado que proporciona una manera visual directa de organizar la información.

La finalidad de la Estadística Descriptiva no es, entonces, extraer conclusiones generales sobre el fenómeno que ha producido los datos bajo estudio, sino solamente su descripción (de ahí el nombre).

2.1. POBLACIÓN Y MUESTRA

Al realizar un estudio es necesario tener bien en claro la diferencia entre población y muestra.

Definición:

Se llama población al conjunto completo de elementos que se estudia y que tienen una característica en común, que es el objeto de estudio.

Esta definición incluye, por ejemplo, a todos los sucesos en que podría concretarse un fenómeno o experimento cualquiera. Una población puede ser finita o infinita.

Los habitantes de un país, los planetas del Sistema Solar, las estrellas en la Vía Láctea son elementos de una población finita. Sin embargo, el número de

posibles medidas que se puedan hacer de la velocidad de la luz, o de tiradas de un dado, forman poblaciones infinitas.

Aunque la población sea finita, el número de elementos que posee puede ser elevado, entonces es necesario trabajar con solo una parte de dicha población.

Definición:

A un subconjunto de elementos de la población se le conoce como muestra.

Si se quiere estudiar las propiedades de las estrellas en una Galaxia, no se tiene la oportunidad de observarlas todas; por lo tanto, se deben estudiar esas características sobre una muestra representativa.

Nótese que elegir de forma representativa los elementos de una muestra es algo muy importante. De hecho, existe un grave problema, conocido como efecto de selección, que puede condicionar el resultado de un estudio si no se realiza una selección correcta de los elementos que forman parte de una muestra.

El número de elementos de la muestra recibe el nombre de: tamaño de la muestra. Es fácil deducir que para que los resultados del estudio estadístico sean fiables es necesario que la muestra tenga un tamaño mínimo.

El caso particular de una muestra que incluye a todos los elementos de la población es conocido como censo.

2.2. CARACTERÍSTICA DE LOS CONJUNTOS DE DATOS

Los objetos a ser medidos pueden ser caracteres de tipos muy diferentes, de allí que se denomine:

-Unidad de análisis o de observación, al objeto bajo estudio. Puede ser una persona, una familia, un país, una región, una institución, en general, cualquier objeto.

-*Variable*, a cualquier característica de la unidad de observación que interese registrar y que, al momento de ser registrada, puede ser transformada en un número.

-*Valor* de una variable, *Observación o Medición*, al número que describe a la característica de interés en una unidad de observación particular.

-*Registro*, al conjunto de mediciones realizadas sobre una unidad de observación.

Por ejemplo, considérese que se desea registrar el sexo, lugar de nacimiento y edad de los habitantes de una región del norte del país.

#	Sexo	Lugar nacimiento	Edad	⇒ Variables
1	M	J1	32	
2	M	J2	28	⇒ Registro
3	F	J1	46	
4	F	J3	42	

Observación

Sexo, lugar de nacimiento, edad son variables que describen a una persona, pero el sexo de esa persona, su lugar de nacimiento y su edad son los valores que estas variables toman para esa persona.

Es importante, al comenzar a manejar un conjunto de datos, identificar cuántas variables se han registrado y cómo fueron registradas esas variables, esto permitirá definir la estrategia de análisis. En el ejemplo anterior, algunas de las variables son números, mientras que otras son letras que indican categorías. A continuación se presenta una clasificación de los distintos tipos de datos que se pueden encontrar. Debe observarse que distintos autores usan distintos criterios para clasificar datos por lo que se presentará un criterio que

resulta útil desde el punto de vista de seleccionar el método de análisis estadístico más apropiado para los mismos.

2.3. TIPO DE DATOS

Datos categóricos o cualitativos

Las variables categóricas o cualitativas resultan de registrar la presencia de un atributo. Las categorías de este tipo de variables deben ser mutuamente excluyentes y exhaustivas, es decir que, cada unidad de observación debe ser clasificada sin ambigüedad en una y solo una de las categorías posibles y que existe una categoría para clasificar a todo individuo.

Es importante contemplar todas las posibilidades cuando se construyen variables categóricas, incluyendo una categoría tal como: No sabe / No contesta, o No registrado u Otras, que asegura que todos los individuos observados serán clasificados con el criterio que define la variable.

Los datos categóricos pueden ser:

a) Dicotómicos, la unidad de observación puede ser asignada a solo una de dos categorías. En general, se trata de la presencia o ausencia de un atributo. La ventaja de este tipo de datos es la de poder asignar código 0 a la ausencia y 1 a la presencia.

Ejemplos:

Varón / Mujer Embarazada / No embarazada

b) Más de dos categorías.

En este tipo de datos, si no existe un orden obvio entre las categorías, se denominan *nominales*. Por ejemplo: país de origen, estado civil. De existir un orden natural entre las categorías se denominan *ordinales*. Un ejemplo clásico es cuando se debe manifestar el acuerdo o no, respecto de una cuestión: Totalmente en desacuerdo, En desacuerdo, Indiferente, De acuerdo y Totalmente de acuerdo.

Datos numéricos

Una variable es numérica cuando el resultado de la observación o medición es un número. Estas variables pueden ser:

a) Discretas, cuando solo pueden tomar una cantidad (finita o infinita) numerable de valores, es decir pueden tomar un cierto conjunto de valores posibles. En general, aparecen por conteo. Por ejemplo, el número de electrones de un átomo, cantidad de personas que viven en un departamento.

b) Continuas, generalmente son el resultado de una medición que se expresa en unidades. Las mediciones pueden tomar teóricamente un conjunto infinito de valores posibles dentro de un rango. En la práctica, los valores posibles de esta variable están limitados por la precisión del método de medición o por el modo de registro.

Por ejemplo, la velocidad o altura de un móvil, el peso de una persona, etc.

La distinción entre datos discretos y continuos es la diferencia básica que existe entre contar y medir.

Considérese, por ejemplo, la variable edad. Edad es continua, pero si se la registra en años resulta ser discreta. En estudios con adultos, en que la edad va de 20 a 70 años, por ejemplo, no hay problemas en tratarla como continua, ya que el número de valores posibles es muy grande. Pero en el caso de niños en edad preescolar, si la edad se registra en años debe tratarse como discreta, en tanto que si se la registra en meses puede tratarse como continua.

Por otra parte, las variables numéricas se pueden clasificar en unidimensionales, cuando solo se mide un carácter o dato de los elementos de la muestra, o bidimensionales, tridimensionales y, en general, n-dimensionales, cuando se estudian simultáneamente varios caracteres de cada elemento.

Por ejemplo, la temperatura o la presión atmosférica (por separado), son variables unidimensionales. La temperatura y la presión atmosférica (estudiadas conjuntamente), o la longitud y el peso de una barra conductora, son ejemplos de variables bidimensionales. La velocidad, carga eléctrica y masa de un ión es tridimensional.

3. DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

El primer paso para el estudio estadístico de una muestra es su ordenación y presentación en una tabla de frecuencias.

3.1. TABLA DE FRECUENCIA DE UNA VARIABLE DISCRETA

Supóngase que se tiene una muestra de tamaño N , donde la variable estadística x toma los valores distintos x_1, x_2, \dots, x_k . En primer lugar, hay que ordenar los diferentes valores que toma la variable estadística en orden (normalmente creciente). La diferencia entre el valor mayor y menor que toma la variable se conoce como *recorrido o rango*.

En el caso de variables discretas, generalmente, un mismo valor de la variable aparecerá repetido más de una vez (es decir $k < N$). De forma que el siguiente paso es la construcción de una tabla en la que se indiquen los valores posibles de la variable y su frecuencia de aparición. Esta es la tabla de frecuencias de una variable discreta:

Valores de la variable estadística	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias absolutas acumuladas	Frecuencias relativas acumuladas
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
x_2	n_2	f_2	N_2	F_2
...
x_k	n_k	f_k	N_k	F_k

Si la variable es categórica, es posible también hacer una tabla de frecuencia. En este caso, en la primera columna se deben escribir las distintas cualidades o atributos que puede tomar la variable.

En las siguientes columnas se escriben para cada valor de la variable:

-Frecuencia absoluta n_i , definida como el número de veces que aparece repetido el valor en cuestión de la variable estadística, en el conjunto de las observaciones realizadas.

Si N es el tamaño de la muestra, las frecuencias absolutas cumplen las siguientes propiedades:

$$0 \leq n_i \leq N \quad y \quad \sum_{i=1}^k n_i = N$$

-Frecuencia relativa f_i , definida como el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra. Es decir que $F_i = \sum_{j=1}^i f_j$

Las frecuencias relativas cumplen con las siguientes propiedades:

$$0 \leq f_i \leq 1 \quad y \quad \sum_{i=1}^k f_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{N} = 1$$

Estas frecuencias también pueden expresarse en tantos por ciento del tamaño de la muestra, para lo cual simplemente debe multiplicarse por 100.

Por ejemplo, si el valor x_i de la variable x tiene por frecuencia relativa $f_i = 0,2$; significa que el valor x_i se repite en el 20% de la muestra.

-Frecuencia absoluta acumulada N_i , definida como la suma de las frecuencias absolutas de los valores inferiores o iguales a x_i . Es decir que $N_i = \sum_{j=1}^i n_j$

Esta frecuencia se puede definir en forma recursiva: $N_i = N_{i-1} + n_i$ con $N_1 = n_1$. Además, el valor de la frecuencia acumulada del último valor será igual al tamaño de la muestra, vale decir que: $N_k = N$.

Frecuencia relativa acumulada F_i , definida como la suma de las frecuencias relativas de los valores inferiores o iguales a x_i . Es decir que $F_i = \sum_{j=1}^i f_j$.

Otra forma de definir esta frecuencia es mediante el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el tamaño de la muestra.

$$F_i = \frac{N_i}{N} \Leftrightarrow F_i = \frac{\sum_{j=1}^i n_j}{N} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^i \frac{n_j}{N} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^i f_j$$

El valor de la frecuencia relativa acumulada del último valor será 1, o sea, $F_k = 1$. Esta frecuencia se puede expresar como un porcentaje y su significado será el tanto por ciento de medidas con valores por debajo o igual que x_i .

Ejemplo 1:

Se registró el número de hijos de una muestra de 20 familias:

2 1 1 3 1 2 5 1 2 3

4 2 3 2 1 4 2 3 2 1

Elaborar la tabla de frecuencias.

Variable: número de hijos que tiene la familia (x_i)

Tamaño de la muestra: 20 (N)

Número de valores posibles que puede asumir x_i : 5 (k).

Recorrido: $5 - 1 = 4$

x_i	n_i	f_i $n_i/20$	N_i $\sum_{j=1}^i n_j$	F_i $\sum_{j=1}^i f_j$
1	6	0,30	6	0,30
2	7	0,35	13	0,65
3	4	0,20	17	0,85
4	2	0,10	19	0,95
5	1	0,05	20	1,00

$n_2 = 7$ significa que 7 familias tienen 2 hijos, es decir que el 35% ($f_i = 0,35$) de las 20 familias tienen 2 hijos.

$N_3 = 17$ significa que 17 familias tienen 3 o menos hijos, es decir que el 85% ($F_i = 0,85$) de las 20 familias tienen 3 o menos hijos.

Ejemplo 2:

En la siguiente tabla se registró el género de 70 libros nuevos que ingresaron a una biblioteca.

x_i	n_i	f_i $n_i/70$	N_i $\sum_{j=1}^i n_j$	F_i $\sum_{j=1}^i f_j$
Narrativa	12	0,17	12	0,17
Biografía	5	0,07	17	0,24
Poesía	20	0,29	37	0,53
Cuento	23	0,33	60	0,86
Teatro	10	0,14	70	1,00

Variable: género del libro (x_i)

Tamaño de la muestra: 70 (N)

Número de categorías posibles que puede asumir x_i : 5 (k).

$n_2 = 5$ significa que 5 libros son del género biográfico, es decir que el 7% ($f_i = 0,07$) de los 70 libros son del género biografía.

$N_4 = 60$ significa que 60 libros son o bien del género narrativo o del biográfico o del poético o de cuento, es decir que estas cuatro categorías conforman el 86% ($F_i = 0,86$) de los libros.

3.2. AGRUPAMIENTO EN INTERVALOS DE CLASES

Cuando el número de valores distintos que toma la variable estadística es demasiado grande o la variable es continua, no resulta útil elaborar una tabla de frecuencias como la vista anteriormente. En estos casos se puede realizar un *agrupamiento de los datos en intervalos* y se hace un recuento del número de observaciones que caen dentro de cada uno de ellos.

Estos intervalos se denominan *intervalos de clase* y al valor de la variable en el centro de cada intervalo se lo denomina *marca de clase*. De esta forma, se sustituye cada medida por la marca de clase del intervalo a que corresponda. La diferencia entre el extremo superior e inferior de cada intervalo se denomina *amplitud del intervalo*. Normalmente se trabaja con intervalos de amplitud constante.

La tabla de frecuencias resultante es similar a la vista anteriormente. En el caso de una distribución en k intervalos, esta sería:

Intervalos de clase	Marca de clase	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias absolutas acumuladas	Frecuencias relativas acumuladas
$a_i - a_{i+1}$	c_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$a_1 - a_2$	c_1	n_1	f_1	N_1	F_1
$a_2 - a_3$	c_2	n_2	f_2	N_2	F_2
...
$a_k - a_{k+1}$	c_k	n_k	f_k	N_k	F_k

La ventaja de realizar el agrupamiento en intervalos de clase es la simplificación del trabajo, pero esto tiene por contrapartida la pérdida de información, ya que no se tiene en cuenta cómo se distribuyen los datos dentro de cada intervalo.

Para que dicha pérdida sea mínima es necesario elegir con cuidado los intervalos. Aunque no existen reglas estrictas para la elección de estos, los pasos a seguir son los siguientes:

- a) Determinar el recorrido o rango de los datos. Vale decir, calcular la diferencia entre el mayor y el menor de los valores que toma la variable.
- b) Decidir el número de intervalos de clase (k) en que se van a agrupar los datos. Por lo general, $5 \leq k \leq 20$ dependiendo del caso que se estudia, k será más grande cuanto más datos posea la muestra. Una regla que se suele seguir es elegir k como el entero más próximo a \sqrt{N} , recordando que N es el tamaño de la muestra.
- c) Determinar la amplitud (constante) de cada intervalo, dividiendo el recorrido o rango de los datos entre el número de intervalos (k). No es

necesario que esta amplitud sea exactamente el resultado de esa división, sino que normalmente se puede redondear hacia un número ligeramente mayor.

d) Determinar los extremos de los intervalos de clase. Evidentemente el extremo superior de cada intervalo ha de coincidir con el extremo inferior del siguiente. Es importante que ninguna observación coincida con alguno de los extremos, para evitar así una ambigüedad en la clasificación de este dato. Una forma de conseguir esto es asignar a los extremos de los intervalos una cifra decimal más que las medidas de la muestra. Por ejemplo, si la variable estadística toma valores enteros: 10, 11, 12, etc., los extremos de los intervalos podrían ser: 9.5 – 11.5, 11.5 – 13.5, etc.

e) Calcular las marcas de clase de cada intervalo como el valor medio entre los límites inferior y superior de cada intervalo de clase. Aquí se debe intentar que las marcas de clase coincidan con medidas de la muestra, disminuyéndose así la pérdida de información debido al agrupamiento.

Una vez determinados los intervalos se debe hacer un recuento cuidadoso del número de observaciones que caen dentro de cada intervalo, para construir así la tabla de frecuencias.

Ejemplo:

Se registró el peso de 80 alumnos de un curso perteneciente a un colegio del nivel medio de la localidad de San Salvador de Jujuy. Elaborar una tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos de clases.

60; 66; 77; 70; 66; 68; 57; 70; 66; 52; 75; 65; 69; 71; 58; 66; 67; 74; 61; 63; 69; 80; 59; 66; 70; 67; 78; 75; 64; 71; 81; 62; 64; 69; 68; 72; 82; 56; 65; 74; 67; 54; 65; 65; 69; 61; 67; 73; 57; 62; 67; 68; 63; 67; 71; 68; 76; 61; 62; 63; 76; 61; 67; 67; 64; 72; 64; 73; 79; 58; 67; 71; 68; 59; 69; 70; 66; 62; 63; 66.

a) Recorrido: $82 - 52 = 30$

b) $k = \sqrt{80} \cong 8,94 \Rightarrow k = 9$ Como se redondea por exceso, la amplitud del intervalo multiplicada por el número de intervalos será mayor que el recorrido y no se tendrá problemas en los extremos.

c) Amplitud del intervalo: $30/9 \cong 3, \hat{3} \cong 3,4$

d) Extremos de los intervalos. Para evitar coincidencias se toma un decimal más. El primer extremo se toma algo menor que el valor mínimo, pero calculándolo de forma que el último extremo sea algo mayor que el valor máximo.

Si se toma $a_1 = 51,5$ se verifica que es menor que 52 (valor mínimo) y el último extremo será $51,5 + 9 * 3,4 = 82,1$ que resulta ser mayor que el valor máximo, 82.

$a_i - a_{i+1}$	c_i	n_i	$f_i = n_i/N$	N_i	F_i
51,5 – 54,9	53,2	2	0,025	2	0,025
54,9 – 58,3	56,6	5	0,0625	7	0,0875
58,3 – 61,7	60	7	0,0875	14	0,175
61,7 – 65,1	63,4	16	0,2	30	0,375
65,1 – 68,5	66,8	21	0,2625	51	0,6375
68,5 – 71,9	70,2	13	0,1625	64	0,8
71,9 – 75,3	73,6	8	0,1	72	0,9
75,3 – 78,7	77	4	0,05	76	0,95
78,7 – 82,1	80,4	4	0,05	80	1

3.3. REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Luego de haber construido la tabla de frecuencias de una muestra, es conveniente la representación gráfica de la distribución de los datos. Esto permite una visualización rápida de la información recogida.

Dependiendo del tipo de datos y de cómo estén organizados, se pueden utilizar distintos tipos de representaciones gráficas.

a) Si se trata de una variable discreta sin agrupar, se usa principalmente el diagrama de barras. En este diagrama se representan, sobre el eje de las abscisas, los distintos valores de la variable y sobre cada uno de ellos se levanta una barra de longitud igual a la frecuencia correspondiente. Se pueden representar tanto las frecuencias absolutas n_i como las relativas f_i . En la práctica, se puede graduar simultáneamente el eje de las ordenadas tanto para frecuencias absolutas como para las relativas, estas últimas en tantos por ciento.

El diagrama anterior puede completarse con el polígono de frecuencias. Este se obtiene uniendo con rectas los puntos medios de los extremos superiores de las barras del diagrama de barras. De la misma forma, pueden representarse frecuencias absolutas, relativas, o ambas a la vez.

En el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta” se elaboró la siguiente tabla, correspondiente al número de hijos de una muestra de 20 familias.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	6	0,30	6	0,30
2	7	0,35	13	0,65
3	4	0,20	17	0,85
4	2	0,10	19	0,95
5	1	0,05	20	1,00

El diagrama de barras y el polígono de frecuencias correspondientes son los siguientes

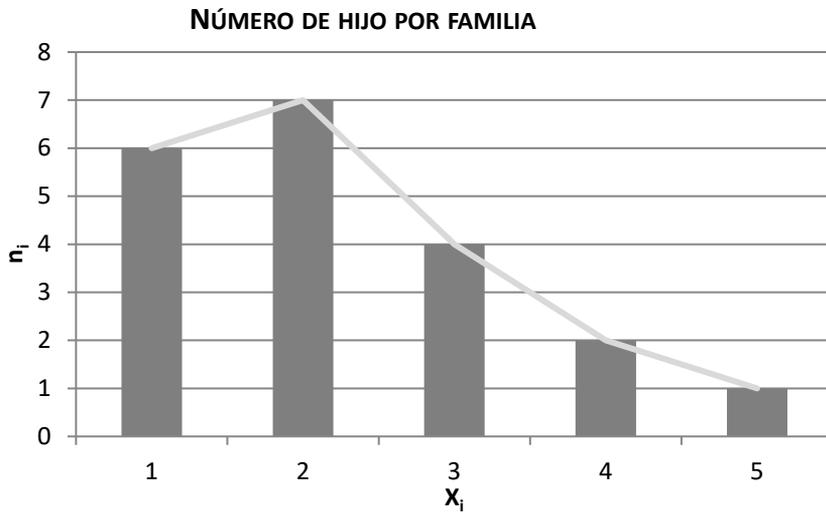


Gráfico 1: diagrama de barra y polígono de frecuencia. Ejemplo 1 del apartado “Tabla de frecuencia de una variable discreta”.

Fuente: elaboración propia.

Para representar las frecuencias (absolutas o relativas) acumuladas se usa el diagrama de frecuencias acumuladas. Este gráfico, en forma de escalera, se construye representando en el eje de las abscisas los distintos valores de la variable y levantando sobre cada x_i una perpendicular cuya longitud será la frecuencia acumulada (N_i o F_i) de ese valor. Los puntos se unen con tramos horizontales y verticales. Evidentemente la escalera resultante ha de ser siempre ascendente.

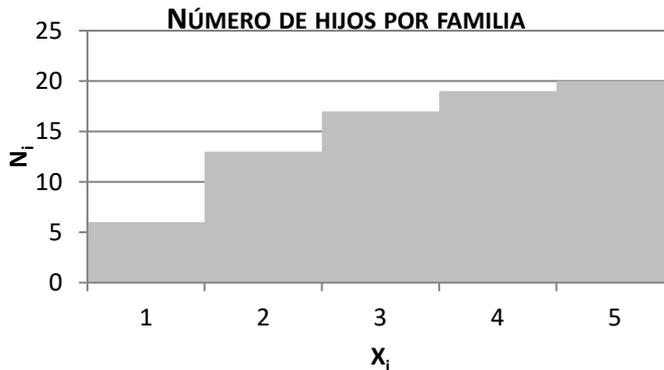


Gráfico 2: diagrama de frecuencias acumuladas (N_i). Ejemplo 1 del apartado 3.1 "Tabla de frecuencia de una variable discreta".

Fuente: elaboración propia.

b) Si se trata de datos agrupados, la representación gráfica más utilizada es el histograma de frecuencias absolutas o relativas.

Un histograma es un conjunto de rectángulos adyacentes, cada uno de los cuales representa un intervalo de clase. La base de cada rectángulo es proporcional a la amplitud del intervalo. Por lo tanto, el centro de la base de cada rectángulo corresponde a la marca de clase del intervalo que representa. La altura se suele determinar para que el área de cada rectángulo sea igual a la frecuencia de la marca de clase correspondiente.

En consecuencia, la altura de cada rectángulo se puede calcular como el cociente entre la frecuencia (absoluta o relativa) y la amplitud del intervalo. En el caso de que la amplitud de los intervalos sea constante, la representación es equivalente a usar como altura la frecuencia de cada marca de clase, siendo este método más sencillo para dibujar rápidamente un histograma.

Al igual que en las variables no agrupadas, otro tipo de representación es el polígono de frecuencias. Este se obtiene uniendo con líneas rectas los puntos medios de cada segmento superior de los rectángulos en el histograma.

En el ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases” se elaboró la siguiente tabla, correspondiente al peso de 80 alumnos de un curso perteneciente a un colegio del nivel medio de la localidad de San Salvador de Jujuy.

$a_i - a_{i+1}$	c_i	n_i	$f_i = n_i/N$	N_i	F_i
51,5 – 54,9	53,2	2	0,025	2	0,025
54,9 – 58,3	56,6	5	0,0625	7	0,0875
58,3 – 61,7	60	7	0,0875	14	0,175
61,7 – 65,1	63,4	16	0,2	30	0,375
65,1 – 68,5	66,8	21	0,2625	51	0,6375
68,5 – 71,9	70,2	13	0,1625	64	0,8
71,9 – 75,3	73,6	8	0,1	72	0,9
75,3 – 78,7	77	4	0,05	76	0,95
78,7 – 82,1	80,4	4	0,05	80	1

El gráfico con el histograma y el polígono de frecuencias correspondientes es el siguiente:

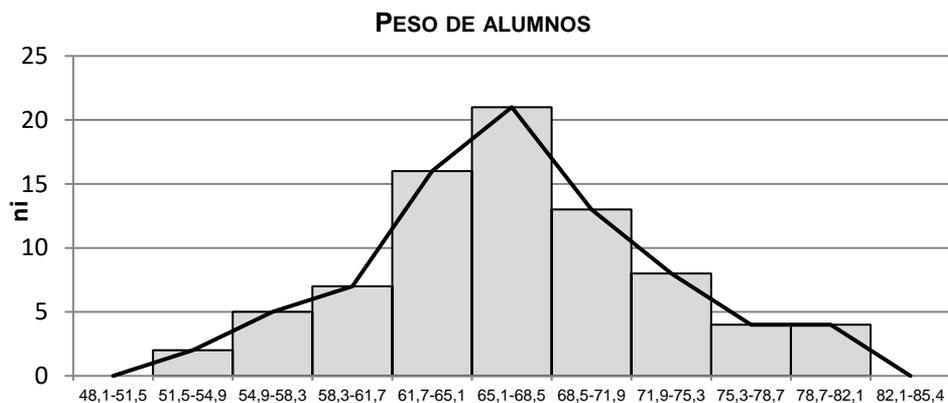


Gráfico 3: histograma y polígono de frecuencia. Ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases”.

Fuente: elaboración propia.

El polígono de frecuencias acumuladas sirve para representar las frecuencias acumuladas de datos agrupados por intervalos. En el eje de las abscisas se representan los diferentes intervalos de clase. Sobre el extremo superior de cada intervalo se levanta una línea vertical de altura igual a la frecuencia (absoluta o relativa) acumulada de ese intervalo. A continuación se unen por segmentos rectos los extremos de las líneas anteriores. El polígono parte de una altura cero para el extremo inferior del primer intervalo. Evidentemente, la altura que se alcanza al final del polígono es N , para frecuencias absolutas, o 1, para frecuencias relativas.

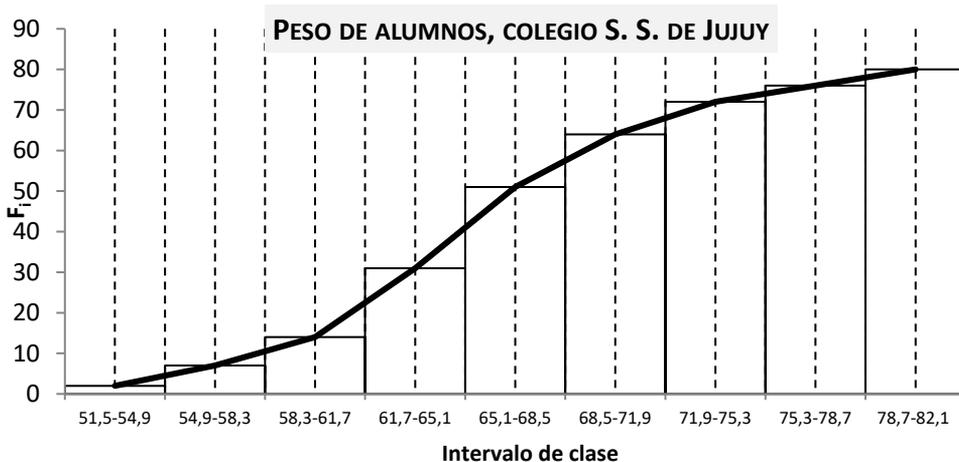


Gráfico 4: polígono de frecuencias acumuladas (Ni). Ejemplo del apartado 3.2. "Agrupamiento en intervalos de clases".

Fuente: elaboración propia.

c) Existe una gran variedad de representaciones gráficas para variables cualitativas, pero son dos las más usadas. El diagrama de rectángulos, que es similar al diagrama de barras, y el histograma para las variables cuantitativas sirven para representar en el eje de abscisas los diferentes caracteres cualitativos y levantar sobre cada uno de ellos un rectángulo (de forma no solapada) cuya altura sea la frecuencia (absoluta o relativa) de dicho carácter. El otro diagrama muy usado es el diagrama de sectores, también llamado diagrama de torta. En él se representa el valor de cada carácter cualitativo como un sector de un círculo completo, siendo el área de cada sector (o lo que es lo mismo, el arco subtendido) proporcional a la frecuencia del carácter en cuestión. Es habitual escribir dentro, o a un lado, de cada sector la frecuencia correspondiente. Este tipo de diagrama proporciona una idea visual muy clara de cuáles son los caracteres que más se repiten.

En el ejemplo 2 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta” se elaboró la tabla correspondiente al género de 70 libros nuevos que ingresaron a una biblioteca.

El diagrama de rectángulos y diagrama de sectores correspondientes son los siguientes.

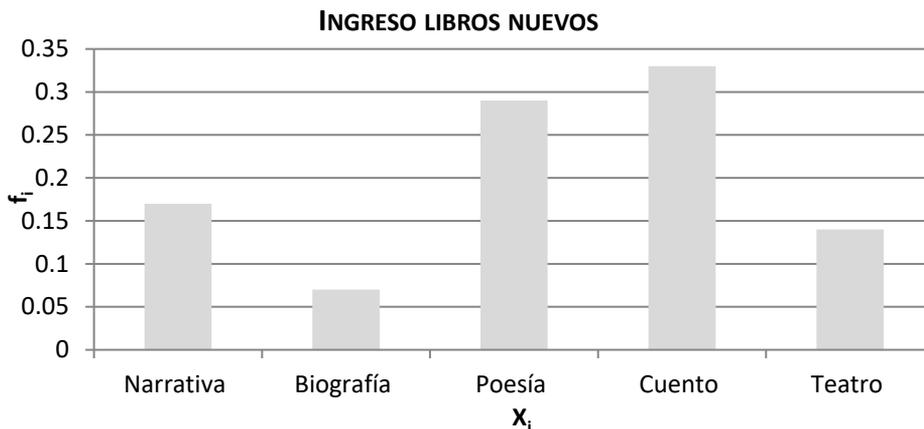


Gráfico 5: diagrama de rectángulos. Ejemplo 2 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”.

Fuente: elaboración propia.

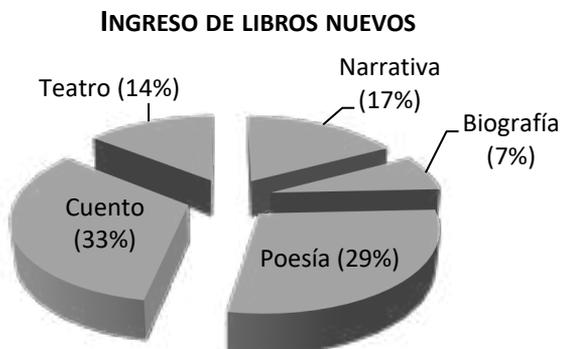


Gráfico 6: diagrama de sectores. Ejemplo 2 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”.

Fuente: elaboración propia.

4. MEDIDAS CARACTERÍSTICAS DE UNA DISTRIBUCIÓN

Después de haber construido tablas de frecuencias y haber realizado alguna representación gráfica, el siguiente paso para llevar a cabo un estudio de los datos recogidos es el cálculo de diferentes medidas que son características de la distribución.

Se pueden calcular diversas medidas que son capaces de resumir toda la información recogida en un pequeño número de valores.

Resumir un conjunto de datos significa pasar de una visión detallada a una generalización simple e informativa tratando de preservar las características esenciales. Este proceso permite simplificar la comprensión y la comunicación de los datos.

Estas medidas “resumen” van a permitir comparar distintas muestras y dar una idea rápida de cómo se distribuyen los datos. Es evidente que todas estas medidas solo pueden definirse para variables cuantitativas.

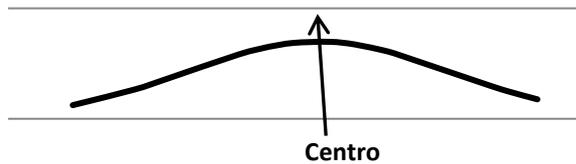
4.1. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Entre las medidas características de una distribución se destacan las llamadas medidas de centralización, que indican el valor promedio de los datos, o en torno a qué valor se distribuyen estos. Es decir que estas medidas describen un valor alrededor del cual se encuentran las observaciones.

Por lo tanto, una medida de centralización es un valor que pretende indicar dónde se encuentra el centro de la distribución de un conjunto de datos. Pero, ¿cómo identificar el centro de una distribución?

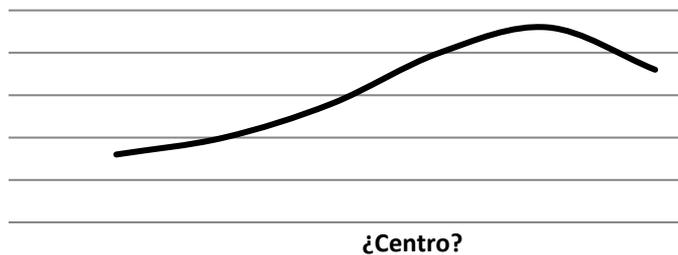
El centro es fácil de identificar si la distribución es simétrica.

DISTRIBUCIÓN SIMÉTRICA



Pero si la distribución es asimétrica, resulta difícil identificar el centro.

DISTRIBUCIÓN ASIMÉTRICA



Por esta razón, no existe una única medida de centralización para resumir una distribución. Si la distribución es simétrica, diferentes medidas conducirán a resultados similares. Si la distribución es claramente asimétrica, diferentes propuestas apuntarán a distintos conceptos de "centro" y, por lo tanto, los valores serán diferentes.

Para salvar este inconveniente, es necesario analizar las distintas medidas calculadas y ver cuál de ellas es la que mejor se adapta a la distribución de datos que se analiza.

a) Media aritmética

Supóngase que se tiene una muestra de tamaño N , donde la variable estadística x toma los valores $x_1, x_2, \dots ; x_n$. Se define la *media aritmética* \bar{x} ,

o simplemente media, de la muestra como $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$

Vale decir que la media es básicamente un promedio y se calcula sumando los distintos valores de la variable x y dividiendo por la cantidad de datos. En el caso de que los diferentes valores de la variable aparezcan repetidos, tomando los valores $x_1, x_2, \dots ; x_k$ con frecuencias absolutas $n_1, n_2, \dots n_k$, la media se determina como $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i}{N}$, pudiéndose expresar también en función de las frecuencias relativas como: $\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i$

Continuando con el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”, calcúlese la media aritmética de los datos.

x_i	n_i	f_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i \cdot f_i$
1	6	0,30	6	0,30
2	7	0,35	14	0,70
3	4	0,20	12	0,60
4	2	0,10	8	0,40
5	1	0,05	5	0,25
Total	20	1,00	45	2,25

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i}{N} = \frac{45}{20} = 2,25 \text{ o bien } \bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i = 2,25.$$

$\bar{x} = 2,25$ significa que, en promedio, las familias que intervinieron en la muestra tienen dos hijos.

En el caso de tener una muestra agrupada en k intervalos de clase, la media se puede calcular a partir de las marcas de clase c_i y el número n_i de datos en cada intervalo, utilizando la expresión: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i \cdot n_i}{N}$. Nótese que la expresión anterior es solamente aproximada. Es más exacto, para el cálculo de la media, no realizar el agrupamiento en intervalos y usar alguna de las expresiones anteriores.

Calcúlese la media aritmética del ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases”.

c_i	n_i	$c_i \cdot n_i$
53,2	2	106,4
56,6	5	283
60	7	420
63,4	16	1014,4
66,8	21	1402,8
70,2	13	912,6
73,6	8	588,8
77	4	308
80,4	4	321,6
Total	80	5357,6

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i \cdot n_i}{N} = \frac{5357,6}{80} = 66,97$$

Nótese la diferencia si se emplea la expresión:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{5361}{80} = 67,0125$$

Esto significa que, en promedio, el peso de los alumnos pertenecientes a un curso de un colegio del nivel medio de la localidad de San Salvador de Jujuy es de 67 kg.

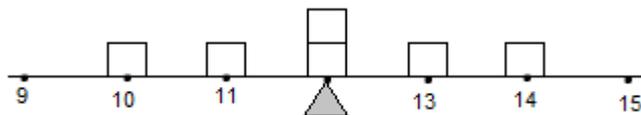
Una propiedad importante de la media aritmética es que, la suma de las desviaciones (o distancias) de un conjunto de datos respecto a su media es

cero. Es decir, la media equilibra las desviaciones positivas y negativas respecto a su valor. Esto se expresa como: $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$

Por ejemplo, sean los datos: 10, 11, 12, 12, 13 y 14 cuya media es $\bar{x} = 12$. En la siguiente tabla comprobamos, para este ejemplo, la propiedad enunciada.

x_i	$x_i - \bar{x}$
10	-2
11	-1
12	0
12	0
13	1
14	2
Total	0

Por lo tanto, una segunda propiedad de la media aritmética es que representa una especie de centro de gravedad, o centro geométrico, del conjunto de datos. Se puede imaginar a los datos como un sistema físico en el que cada uno tiene una “masa” unitaria. Si se ubican los datos sobre una barra horizontal en la posición correspondiente a su valor, la media representa la posición en que se deberá ubicar el punto de apoyo para que el sistema esté en equilibrio.



Una tercera propiedad de la media como medida de tendencia central es que es poco “robusta”, es decir, depende mucho de valores atípicos de los datos. Si, por ejemplo, en una muestra se introduce un nuevo dato con un valor mucho

mayor que el resto, la media aumenta apreciablemente. Continuando con el ejemplo anterior 10, 11, 12, 12, 13 y 14 y $\bar{x} = 12$, si ahora se tiene 10, 11, 12, 12, 13, 14 y 68, la media es $\bar{x} = 20$. La media aritmética es, por tanto, muy dependiente de observaciones extremas.

Existen otras definiciones de media que pueden tener su utilidad en algunos casos. La primera de estas es la *media geométrica* \bar{x}_G . En el caso de una muestra con valores diferentes de la variable, se define como la raíz enésima (N es el tamaño de la muestra) del producto de los valores de la variable:

$$\bar{x}_G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_N}$$

La segunda, la *media armónica* \bar{x}_A se define como la inversa de la media aritmética de las inversas de los valores de la variable. Es decir, para variables no agrupadas y agrupadas, respectivamente, sería: $\bar{x}_A = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$; $\bar{x}_A = \frac{N}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}}$

Una tercera definición, que tiene su utilidad con frecuencia en la aplicación a fenómenos físicos, corresponde a la *media cuadrática* \bar{x}_Q . Que se define como la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores:

$$\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}; \quad \bar{x}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot n_i}{N}}$$

En general, ninguna de estas medias es muy robusta, aunque esto depende de cómo se distribuyan las variables. Por ejemplo, la media armónica es muy poco sensible a valores muy altos de la variable, mientras que a la media cuadrática apenas le afectan los valores muy bajos de la variable.

b) Mediana

Una medida de tendencia central importante es la mediana M_e ; que se define como una medida central tal que, con los datos ordenados de menor a mayor, la mitad de estos son inferiores a su valor y la otra mitad tienen valores

superiores. Es decir, la mediana divide en dos partes iguales la distribución de frecuencias o, gráficamente, divide el histograma en dos partes de áreas iguales. Se distinguirá distintos casos para el cálculo de la mediana.

Supóngase, en primer lugar, que los diferentes valores de la variable no aparecen, en general, repetidos.

En este caso y suponiendo que se tienen los datos ordenados, la mediana será el valor central, si el tamaño de la muestra N es impar o será la media aritmética de los dos valores centrales, si N es par.

Por ejemplo, si $x = 1, 4, 6, 7, 9$, entonces $M_e = 6$; por otro lado, si $x = 1, 4, 6, 7$, la mediana es $M_e = \frac{4+6}{2} = 5$.

En segundo lugar, supóngase que se tiene una variable discreta con valores repetidos sobre la cual se ha elaborado una tabla de frecuencias; se calcula en primer lugar el número de observaciones, N , dividido entre 2.

Se pueden distinguir aquí dos subcasos. El primero de ellos es cuando el valor $N/2$ coincide con la frecuencia absoluta acumulada N_j de un valor x_j de la variable o, lo que es lo mismo, cuando la frecuencia relativa acumulada $F_j = 0,5$. En este caso, la mediana se ha de situar entre este valor de la variable y el siguiente, ya que de esta forma dividirá la distribución de frecuencias en dos partes. Es decir, se calcula como la media aritmética de dicho valor de la variable y su superior $M_e = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$

Se modificará levemente el ejemplo 1 del apartado 3.1. "Tabla de frecuencia de una variable discreta" para calcular la mediana, acorde a lo enunciado precedentemente.

x_i	N_i
1	6
2	10
3	15
4	17
5	20

Se tiene 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 5 5 5 como $\frac{N}{2} = 10 = N_2$, entonces la

mediana se calculará como: $M_e = \frac{x_2 + x_{2+1}}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5$

Si el valor $N/2$ no coincidiese con ningún valor de la columna de frecuencias acumuladas (segundo subcaso), la mediana sería el primer valor de x_j con frecuencia absoluta acumulada N_j mayor que $N/2$, ya que el valor central de la distribución correspondería a una de las medidas englobadas en ese x_j .

Continuando con el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta” calcúlese la mediana.

x_i	N_i
1	6
2	13
3	17
4	19
5	20

Se tiene 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 5, como $\frac{N}{2} = 10$, entonces la mediana será el primer valor de x_i con frecuencia absoluta acumulada $N_i > 10$, es decir: $M_e = x_2 = 2$.

En tercer lugar, supóngase que se tiene una muestra de una variable continua cuyos valores están agrupados en intervalos de clase, en este caso pueden ocurrir dos situaciones: primero, si $N/2$ coincide con la frecuencia absoluta acumulada N_j de un intervalo (a_j, a_{j+1}) (con marca de clase c_j), la mediana será sencillamente el extremo superior a_{j+1} de ese intervalo; segundo, si ninguna frecuencia absoluta acumulada coincide con $N/2$ será necesario interpolar en el polígono de frecuencias acumuladas.

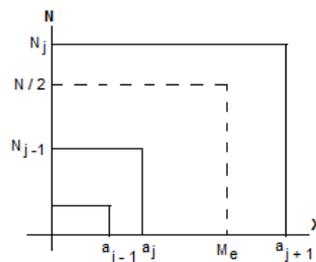


Gráfico 7: cálculo de la mediana.

Fuente: elaboración propia.

Supóngase que el valor $N/2$ se encuentra entre las frecuencias N_{j-1} y N_j correspondientes a los intervalos (a_{j-1}, a_j) y (a_j, a_{j+1}) respectivamente, la mediana se situará en algún lugar del intervalo superior (a_j, a_{j+1}) .

Según se muestra en el gráfico, para calcular el valor exacto se debe interpolar¹³:

¹³ En el análisis numérico, se denomina interpolación a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos.

$$\frac{a_{j+1}-a_j}{N_j-N_{j-1}} = \frac{M_e-a_j}{\frac{N}{2}-N_{j-1}} \text{ de donde se despeja } M_e,$$

entonces

$$M_e = \frac{a_{j+1}-a_j}{N_j-N_{j-1}} \cdot \left(\frac{N}{2} - N_{j-1}\right) + a_j \text{ reordenando } M_e = a_j + \frac{\frac{N}{2} - N_{j-1}}{N_j - N_{j-1}} (a_{j+1} - a_j) \text{ y}$$

$$\text{finalmente } M_e = a_j + \frac{\frac{N}{2} - N_{j-1}}{n_j} (a_{j+1} - a_j)$$

Calcúlese la mediana para el ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases”.

$a_i - a_{i+1}$	n_i	N_i
51,5 – 54,9	2	2
54,9 – 58,3	5	7
58,3 – 61,7	7	14
61,7 – 65,1	16	30
65,1 – 68,5	21	51
68,5 – 71,9	13	64
71,9 – 75,3	8	72
75,3 – 78,7	4	76
78,7 – 82,1	4	80

$$\frac{N}{2} = 40 \neq N_i$$

$(N_4 = 30) < \left(\frac{N}{2} = 40\right) < (N_5 = 51)$. Por lo tanto, la mediana se situará en el intervalo 65,1 – 68,5 es decir que $65,1 < M_e < 68,5$.

$$M_e = a_j + \frac{\frac{N}{2} - N_{j-1}}{n_j} (a_{j+1} - a_j) = a_5 + \frac{40 - N_4}{n_5} (a_6 - a_5) = 65,1 + \frac{40 - 30}{21} (68,5 - 65,1)$$

$$M_e = 65,1 + 0,4762 \cdot 3,4 = 66,72$$

Compárese este valor con el de la media aritmética $\bar{x} \cong 67$

Una de las propiedades de la mediana es que puede ser utilizada no solo para datos numéricos, sino además para datos ordinales, ya que para calcularla solo es necesario establecer un orden en los datos.

Otra propiedad es que la mediana es insensible a la distancia de las observaciones al centro, ya que solamente depende del orden de los datos. Esta característica, si bien la hace robusta, es una desventaja de la mediana.

Por ejemplo, todos los siguientes conjuntos de datos tienen mediana 12.

i) 10 11 12 13 14

ii) 10 11 12 13 100

iii) 0 11 12 12 12

iv) 10 11 12 100 100

Si se comparan las dos medidas de tendencia central estudiadas, la mediana tiene propiedades muy distintas respecto de la media aritmética, presentando sus ventajas e inconvenientes respecto de esta.

En primer lugar, si la distribución de los datos es aproximadamente simétrica, la media y la mediana serán aproximadamente iguales.

Pero si la distribución de los datos es asimétrica, la media y la mediana diferirán según el siguiente patrón:

Asimetría derecha (cola larga hacia la derecha), entonces $\bar{x} > M_e$

Asimetría izquierda (cola larga hacia la izquierda), entonces $\bar{x} < M_e$

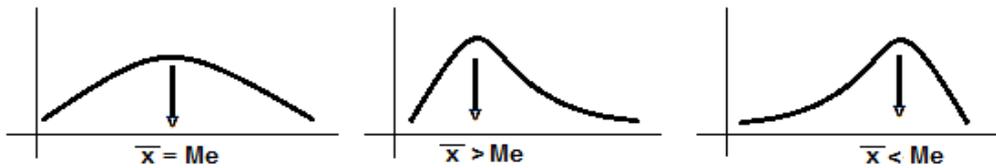
Por ejemplo, si la variable x toma los valores:

i) 12, 13, 14, 15, 16, entonces $\bar{x} = M_e = 14$

ii) 12, 13, 14, 15, 20, entonces $\bar{x} \cong 15 > M_e = 14$

iii) 12, 13, 14, 15, 16, entonces $\bar{x} = 12 < M_e = 14$

Gráficamente:



Por otro lado, la mayor ventaja de la media es que utiliza toda la información de la distribución de frecuencias (todos los valores particulares de la variable), en cambio la mediana solo utiliza el orden en que se distribuyen los valores de la variable. Podría pues considerarse, desde este punto de vista, que la media aritmética es una medida más fiable del valor central de los datos. Sin embargo, recuérdese que la media es muy poco robusta, en el sentido de que es muy sensible a valores extremos de la variable y, en consecuencia, a posibles errores en las medidas.

La mediana es una medida robusta, ya que no es afectada por valores que se desvíen mucho o que sean atípicos.

Por ejemplo, supóngase que la variable x toma los valores: 2, 4, 5, 7 y 8, la media aritmética y la mediana serían, en este caso, muy parecidas: $\bar{x} = 5,2$ y $M_e = 5$. Pero sustitúyase el último valor 8 por 30, la nueva media se ve muy afectada $\bar{x} = 9,6$, no siendo en absoluto una medida de la tendencia central, mientras que el valor de la mediana no cambia. Pudiese ocurrir también el caso inverso.

Por ejemplo, para el caso de las longitudes (en cm) de barras de hierro, inicialmente idénticas calentadas a temperaturas desconocidas en distintos recipientes: 1,80; 1,82; 1,85; 1,90 y 2,00, cuya media y mediana son $\bar{x} = 1,874$ y $M_e = 1,85$, respectivamente. Si la temperatura de uno de esos recipientes varía y la longitud mayor aumenta de 2,00 a 2,20 cm, la mediana no varía, pero la media ahora es $\bar{x} = 1,914$.

En general, lo mejor es considerar media aritmética y mediana como medidas complementarias. Es más, la comparación de sus valores puede suministrar información muy útil sobre la distribución de los datos.

c) Moda

Se define moda M_0 de una muestra a aquel valor de la variable que tiene una frecuencia máxima, es decir que la moda es el valor que más se repite. Hay que indicar que puede suceder que la moda no sea única, o sea que aparezcan varios máximos en la distribución de frecuencias, en ese caso se dice que la distribución es bimodal, trimodal, etc. Evidentemente, en el caso de una variable discreta que no tome valores repetidos, la moda no tiene sentido. Cuando sí existen valores repetidos, su cálculo es directo, ya que puede leerse directamente de la tabla de distribución de frecuencias.

Continuando con el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”, calcúlese la moda.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	6	0,30	6	0,30
2	7	0,35	13	0,65
3	4	0,20	17	0,85
4	2	0,10	19	0,95
5	1	0,05	20	1,00

El valor que más se repite es 2 hijos, que ocurre en siete familias de la muestra ($n_i = 7$). Por lo tanto, la moda es $M_0 = 2$ y, en este ejemplo, coincide con la mediana.

En el caso de variables continuas agrupadas en intervalos de clase, existirá un intervalo en el que la frecuencia sea máxima, llamado intervalo modal. Es

posible asociar la moda a un valor determinado de la variable dentro del intervalo modal. Para esto, supóngase que sea $(a_j; a_{j+1})$ el intervalo modal cuya frecuencia máxima es n_j . Si n_{j-1} y n_{j+1} son las frecuencias de los intervalos anterior y posterior al modal, se define $\delta_1 = n_j - n_{j-1}$ y $\delta_2 = n_j - n_{j+1}$ como se muestra en el siguiente gráfico.

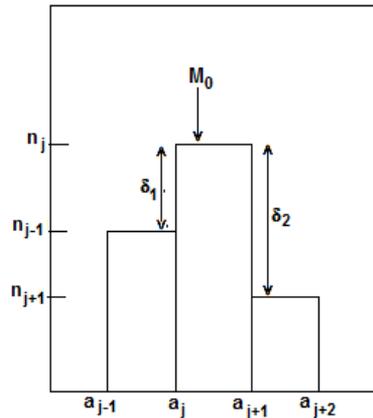


Gráfico 8: cálculo de la moda.

Fuente: elaboración propia.

Puede demostrarse que el valor exacto de la moda es $M_0 = a_j + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} (a_{j+1} - a_j)$. Es decir que la moda estará más próxima a a_j cuanto menor sea la diferencia de frecuencias con el intervalo anterior y al revés. Si, por ejemplo, $n_{j-1} = n_j$ ($\delta_1 = 0$) la moda será efectivamente a_j . Por el contrario, si ocurre que $n_{j+1} = n_j$ ($\delta_2 = 0$), la moda será a_{j+1} estando situada entre dos intervalos.

Calcúlese la moda del ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases”.

$a_i - a_{i+1}$	c_i	n_i
51,5 – 54,9	53,2	2
54,9 – 58,3	56,6	5
58,3 – 61,7	60	7
61,7 – 65,1	63,4	16
65,1 – 68,5	66,8	21
68,5 – 71,9	70,2	13
71,9 – 75,3	73,6	8
75,3 – 78,7	77	4
78,7 – 82,1	80,4	4

El intervalo modal $(a_j; a_{j+1}) = (65,1 - 68,5)$

$$j = 5, \quad n_{j-1} = 16, \quad n_j = 21 \quad y \quad n_{j+1} = 13$$

$$\delta_1 = n_j - n_{j-1} = 21 - 16 = 5 \quad y \quad \delta_2 = n_j - n_{j+1} = 21 - 13 = 8$$

$$M_0 = a_j + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} (a_{j+1} - a_j) = 65,1 + \frac{5}{5+8} (68,5 - 65,1)$$

$$M_0 = 66,40$$

Si la distribución de datos que se analiza fuese perfectamente simétrica, las tres medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda coincidirían en el mismo valor. Sin embargo, cuando la distribución es claramente asimétrica, en general, la posición relativa entre las tres medidas suele ser la siguiente: la mediana se sitúa entre la moda y la media $M_0 < M_e < \bar{x}$.

Compruébese lo enunciado anteriormente para el ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases”, para el cual se obtuvieron los siguientes valores $M_0(66,40) < M_e(66,72) < \bar{x}(66,97)$.

d) Cuartiles, deciles y percentiles

El concepto de mediana puede ser generalizado. Se vio que esta es el valor de la variable que divide a la muestra, ordenada, en dos partes iguales.

Se puede definir de manera similar los *cuartiles* como aquellos tres valores que dividen la muestra en cuatro partes iguales. De esta manera, el primer cuartil $Q_{1/4}$ será la medida tal que el 25% de los datos sean inferiores a su valor y el 75% de los mismos sean superiores. El segundo cuartil $Q_{1/2}$ coincide con la mediana; mientras que el tercer cuartil $Q_{3/4}$ determinará el valor tal que las tres cuartas partes de las observaciones sean inferiores a él y una cuarta parte sea superior. La forma de calcular los cuartiles es igual a la ya vista para la mediana, pero sustituyendo $\frac{N}{2}$ por $\frac{N}{4}$ y $\frac{3N}{4}$ para $Q_{1/4}$ y $Q_{3/4}$, respectivamente.

Continuando con el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”, calcúlense los cuartiles.

x_i	N_i
1	6
2	13
3	17
4	19
5	20

$$\frac{N}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow Q_{1/4} = 1 (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 5)$$

$$\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10 \Rightarrow Q_{1/2} = M_e = 2 (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 5)$$

$$\frac{3N}{4} = \frac{60}{4} = 15 \Rightarrow Q_{3/4} = 3 (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 5)$$

En el caso de las medidas agrupadas en intervalos de clase se trabaja de la misma manera que para determinar la mediana.

Calcúlense los cuartiles para el ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases”.

$a_i - a_{i+1}$	n_i	N_i
51,5 – 54,9	2	2
54,9 – 58,3	5	7
58,3 – 61,7	7	14
61,7 – 65,1	16	30
65,1 – 68,5	21	51
68,5 – 71,9	13	64
71,9 – 75,3	8	72
75,3 – 78,7	4	76
78,7 – 82,1	4	80

$\frac{N}{4} = 20 < 30$, por lo tanto $Q_{1/4}$ se sitúa en el intervalo 61,7 – 65,1

$\frac{3N}{4} = 60 < 64$, por lo tanto $Q_{3/4}$ se sitúa en el intervalo 68,5 – 71,9

$$Q_{1/4} = a_j + \frac{\frac{N}{4} - N_{j-1}}{n_j} (a_{j+1} - a_j) = 61,7 + \frac{20-14}{16} (65,1 - 61,7) = 62,975$$

$$Q_{3/4} = a_j + \frac{\frac{3N}{4} - N_{j-1}}{n_j} (a_{j+1} - a_j) = 68,5 + \frac{60-51}{13} (71,9 - 68,5) = 70,854$$

De forma similar, se pueden definir los *deciles* como aquellos valores de la variable que dividen la muestra, ordenada, en diez partes iguales. Estos valores, denotados por D_k , con $k = 1, 2, \dots, 9$, tienen un valor tal que el decil k -ésimo deja por debajo de él al $10k$ por ciento de los datos de la

muestra. De la misma manera se definen los *percentiles*, también llamados *centiles*, como aquellos valores de la variable denotados por P_k , con $k = 1, 2, \dots, 99$ que dividen a la muestra en cien partes iguales. Esto equivale a decir que el percentil P_k deja por debajo de él al k por ciento de la muestra ordenada.

La forma de calcular deciles y percentiles es igual a la de la mediana y a la de los cuartiles, sustituyendo $\frac{N}{2}$ por la fracción del número total de datos correspondiente. Evidentemente, algunos valores de cuartiles, deciles y centiles coinciden, cumpliéndose por ejemplo: $P_{50} = D_5 = Q_{1/2} = M_e$.

4.2. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de tendencia central reducen la información recogida de la muestra, a un solo valor dando una idea de dónde se encuentra el centro de la distribución. Sin embargo, dicho valor central o medio será más o menos representativo de los valores de la muestra, dependiendo de la dispersión que las medidas individuales tengan respecto a dicho centro. Es decir que las medidas de tendencia central no indican cuán disperso es el conjunto de datos. Por ejemplo, considérense los siguientes conjuntos de datos:

Muestra A: 55 55 55 55 55 55 55

Muestra B: 47 51 53 55 57 59 63

Muestra C: 39 47 53 55 57 63 71

En los tres casos $\bar{x} = M_e = 55$, pero, como es evidente, las muestras difieren notablemente.

Para analizar la representatividad de las medidas de centralización se definen las llamadas medidas de dispersión. Estas indican la variabilidad de los datos en torno a su valor promedio, es decir si estos se encuentran muy o poco esparcidos en torno a su centro.

Se pueden definir diversas medidas de desviación o dispersión, siendo estas fundamentales para la descripción estadística de la muestra.

a) Rango o recorrido

Una evaluación rápida de la dispersión de los datos se puede realizar calculando el *rango o recorrido* o diferencia entre el valor máximo y mínimo que toma la variable estadística.

El rango de n observaciones x_1, x_2, \dots, x_n es la diferencia entre el valor máximo y mínimo que toma la variable $R = \max(x_i) - \min(x_i)$

Calcúlese el rango para cada una de las muestras dadas en el ejemplo anterior.

Una de las características del rango es de ser una medida extremadamente sensible a la presencia de datos atípicos; de existir estos datos, estarán en los extremos que son los datos que se usan para calcular el rango.

Una segunda característica es la de ignorar la mayoría de los datos, puesto que solo usa dos observaciones: la mayor y la menor.

Con el fin de eliminar la excesiva influencia de los valores extremos en el recorrido, se puede definir el recorrido intercuartílico como la diferencia entre el tercer y primer cuartil: $R_I = Q_{3/4} - Q_{1/4}$

Está claro que este recorrido brinda, entonces, el rango que ocupan el 50% central de los datos. En ocasiones se puede, también, utilizar el recorrido semiintercuartílico, o mitad del recorrido intercuartílico: $R_I = \frac{Q_{3/4} - Q_{1/4}}{2}$

b) Desviación media

Otra manera de estimar cuán dispersos están los valores de la muestra es comparar cada uno de ellos con el valor de una medida de centralización. Una de las medidas de dispersión más usada es la *desviación media*, también llamada, con más precisión, *desviación media respecto a la media aritmética*. Esta medida se define como la media aritmética de las diferencias absolutas

entre los valores de la variable y la media aritmética de la muestra. Suponiendo que en una muestra de tamaño N los k distintos valores x_i de la variable tengan frecuencias absolutas n_i , la expresión de la desviación media será:

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| n_i}{N}$$

Si la variable no toma valores repetidos ni está agrupada en intervalos, la expresión anterior se reduce a: $D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}|}{N}$

Destáquese la importancia de tomar el valor absoluto de las desviaciones, ya que, si no se hiciese así, unas desviaciones se anularían con otras, alcanzando finalmente la desviación media un valor 0, debido a la propiedad de la media aritmética ya vista.

Se puede definir una desviación media en términos de desviaciones absolutas en torno a una medida de centralización diferente de la media aritmética. Cuando se utiliza la mediana, se obtiene la llamada desviación media respecto a la mediana, definida como:

$$D_{M_e} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - M_e| n_i}{N}$$

Continuando con el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”, calcúlese la desviación media de los datos, cuya media aritmética es $\bar{x} = 2,25$

x_i	n_i	$ x_i - \bar{x} n_i$
1	6	7,5
2	7	1,75
3	4	3
4	2	3,5
5	1	2,75
Total	20	18,5

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| n_i}{N} = \frac{18,5}{20} = 0,925$$

Continuando con el ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases”, calcúlese la desviación media de los datos, cuya media aritmética es $\bar{x} = 67,0125$. Como los datos están agrupados en intervalos, x_i representa la marca de clase del i -ésimo intervalo.

c_i	n_i	$ x_i - \bar{x} n_i$
53,2	2	27,625
56,6	5	52,0625
60	7	49,0875
63,4	16	57,8
66,8	21	4,4625
70,2	13	41,4375
73,6	8	52,7
77	4	39,95
80,4	4	53,55
Total	80	378,675

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| n_i}{N} = \frac{378,675}{80} = 4,7334$$

El valor absoluto de la desviación, respecto a la media, de un dato en particular indica lo lejos que este dato está del valor de la media. Un valor igual a cero indica que el dato coincide con la media, mientras que un valor elevado con respecto a las demás desviaciones informa que el dato está alejado de los demás.

Ahora bien, como la desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media, esta medida informa de lo

muy dispersados o no que están los datos. Una desviación media elevada implica mucha variabilidad en los datos, mientras que una desviación media igual a cero implica que todos los valores son iguales y, por lo tanto, coinciden con la media.

c) Varianza y desviación estándar

Sin lugar a dudas, la medida más usada para estimar la dispersión de los datos es la desviación estándar. Esta es especialmente aconsejable cuando se usa la media aritmética como medida de tendencia central. Al igual que la desviación media, está basada en un valor promedio de las desviaciones respecto a la media.

En este caso, en vez de tomar valores absolutos de las desviaciones, para evitar así que se compensen desviaciones positivas y negativas, se usan los cuadrados de las desviaciones. Esto hace, además, que los datos con desviaciones grandes tengan mucha influencia en el resultado final.

Por lo tanto se define, en primer lugar, *la varianza* de una muestra con datos repetidos de la siguiente manera $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N-1}$

Evidentemente, la varianza no tiene las mismas unidades que los datos de la muestra. Para conseguir las mismas unidades se define la *desviación estándar* (algunas veces llamada desviación típica) como la raíz cuadrada de la

varianza, o sea que: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N-1}}$

Si los datos no se repiten, estas definiciones se simplifican a:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1} \quad \text{y} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Se puede definir varianza y desviación estándar utilizando N en vez de $N - 1$ en el denominador, representando entonces la varianza una verdadera media aritmética del cuadrado de las desviaciones. Está claro que ambas definiciones

llevan a valores muy parecidos cuando N es grande. El motivo de haber optado por la definición con $N - 1$ es que esta da una mejor estimación de la dispersión de los datos.

Téngase en cuenta que, como la suma de las desviaciones $x_i - \bar{x}$ es siempre 0, la desviación del último dato puede calcularse una vez que se conozcan las $N - 1$ anteriores. Esto quiere decir que solo se tienen $N - 1$ desviaciones independientes y se promedia, entonces, dividiendo por $N - 1$, ya que no tiene mucho sentido promediar N números no independientes. Nótese, además, cuando solo se tiene un dato ($N = 1$), en el caso de la definición con N en el denominador, se obtendría una varianza 0, que no tiene mucho sentido; mientras que en la definición con $N - 1$, la varianza estaría indeterminada.

Ejemplos:

Continuando con el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”, calcúlese la varianza y la desviación estándar de los datos, cuya media aritmética es $\bar{x} = 2,25$

x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	6	9,375
2	7	0,4375
3	4	2,25
4	2	6,125
5	1	7,5625
Total	20	25,75

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N-1} = \frac{25,75}{19} = 1,355, \text{ por lo tanto } s = \sqrt{1,355} = 1,16$$

Continuando con el ejemplo del apartado 3.2. “Agrupamiento en intervalos de clases” calcúlese la varianza y desviación estándar de los datos, cuya media aritmética es $\bar{x} = 67,0125$. Como los datos están agrupados en intervalos, x_i representa la marca de clase del i -ésimo intervalo.

c_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
53,2	2	381,57
56,6	5	542,10
60	7	344,23
63,4	16	208,80
66,8	21	0,9483
70,2	13	132,08
73,6	8	347,16
77	4	399,00
80,4	4	716,90
Total	80	3073,51

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N-1} = \frac{3073,51}{79} = 38,90, \text{ por lo tanto } s = \sqrt{38,90} = 6,24$$

La desviación estándar s es útil para comparar la variabilidad de dos conjuntos de datos en los que la variable ha sido medida en las mismas unidades. Por ejemplo, si en una muestra $s = 2,3$ y en otra $s = 8,4$ se puede asegurar que los datos de la segunda muestra están más dispersos que los de la primera. Pero ¿cómo se interpreta el valor $s = 2,3$?

La desviación estándar da la idea de la distancia promedio de los datos a la media (estrictamente hablando, no es el promedio). Pero la interpretación de

s requiere de algún conocimiento de la distribución de los datos. Es por ello que se puede dar la siguiente regla empírica.

Si el histograma de los datos es aproximadamente simétrico y acampanado entonces:

Aproximadamente, el 68% de las observaciones caen en el intervalo $\bar{x} - s$ y $\bar{x} + s$

Aproximadamente, el 95% de las observaciones caen en el intervalo $\bar{x} - 2s$ y $\bar{x} + 2s$

Prácticamente, todas las observaciones caen en el intervalo $\bar{x} - 3s$ y $\bar{x} + 3s$

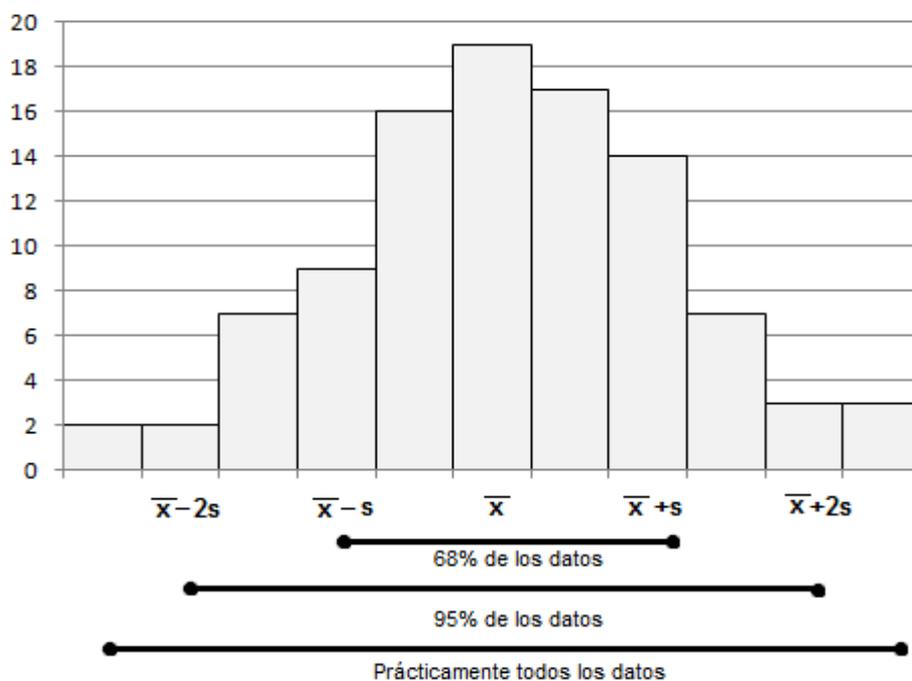


Gráfico 9: regla práctica para la interpretación de la desviación estándar.

Fuente: elaboración propia.

Esta regla es válida para distribuciones no necesariamente acampanadas, pero puede ser errónea cuando se aplica a distribuciones fuertemente asimétricas.

Nótese que la desviación estándar no es una medida robusta de la dispersión. El hecho de que se calcule evaluando los cuadrados de las desviaciones hace que sea muy sensible a observaciones extremas, bastante más que la desviación media (dado que aparece un cuadrado). O sea que, la desviación estándar no es una buena medida de dispersión cuando existe algún dato muy alejado de la media. El rango intercuartílico daría, en ese caso, una idea más aproximada de cuál es la dispersión de los datos. El que la desviación estándar sea la medida de dispersión más común se debe a su íntima conexión con la distribución normal.

Por último, la desviación estándar valdrá cero solamente cuando todos los datos sean iguales, de otro modo será positiva.

d) Coeficientes de variación

Las medidas de dispersión vistas presentan un inconveniente, ya que vienen expresadas en las unidades en que se ha medido la variable. Es decir, son medidas absolutas, y con el único dato de su valor no es posible decir si se tiene una dispersión importante o no. Para solucionar esto, se definen unas medidas de dispersión relativas, independiente de las unidades usadas. Estas dispersiones relativas van a permitir además comparar la dispersión entre diferentes muestras (con unidades diferentes). Entre estas medidas hay que destacar el *coeficiente de variación de Pearson (CV)*, definido como el cociente entre la desviación estándar y la media aritmética: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$

Obviamente este coeficiente no se puede calcular cuando $\bar{x} = 0$. Normalmente, CV se expresa en porcentaje, multiplicando su valor por 100. Evidentemente, cuanto mayor sea CV, mayor dispersión tendrán los datos.

Continuando con el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”, calcúlese el coeficiente de variación de los datos, cuya media aritmética es $\bar{x} = 2,25$ y desviación estándar $s = 1,16$

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{1,16}{2,25} = 0,515 \cong 52\%$$

Para el ejemplo del apartado 3.2. "Agrupamiento en intervalos de clases", calcúlese el coeficiente de variación de los datos, cuya media aritmética es $\bar{x} = 67,0125$ y desviación estándar $s = 6,24$

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{6,24}{67,0125} = 0,093 \cong 9,3\%$$

También se pueden definir otras medidas de dispersión relativas, como el *coeficiente de variación media*. Este es similar al *coeficiente de variación* de Pearson, pero empleando una desviación media en vez de la desviación estándar. Por lo tanto, se tienen dos coeficientes de variación media dependiendo de que se calcule la desviación media respecto a la media aritmética o respecto a la mediana:

$$CVM_{\bar{x}} = \frac{D_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} \quad y \quad CVM_{Me} = \frac{D_{Me}}{|Me|}$$

4.3. ASIMETRÍA Y CURTOSIS

La descripción estadística de una muestra de datos incluye, además de las medidas de tendencia central y de dispersión, el grado de simetría de los datos respecto a su medida central y la concentración de estos alrededor de dicho valor. De esta forma se dará una descripción completa de la muestra.

a) Coeficientes de asimetría

Se dice que una distribución de medidas es simétrica cuando los valores de la variable equidistantes del valor central tienen la misma frecuencia. Es decir, en este caso se tendría simetría en el histograma (o en el diagrama de barras) alrededor de una recta vertical trazada por el punto central. En el caso de una distribución perfectamente simétrica, los valores de la media aritmética, mediana y moda coinciden ($\bar{x} = M_e = M_o$). Esto se muestra en el siguiente gráfico.

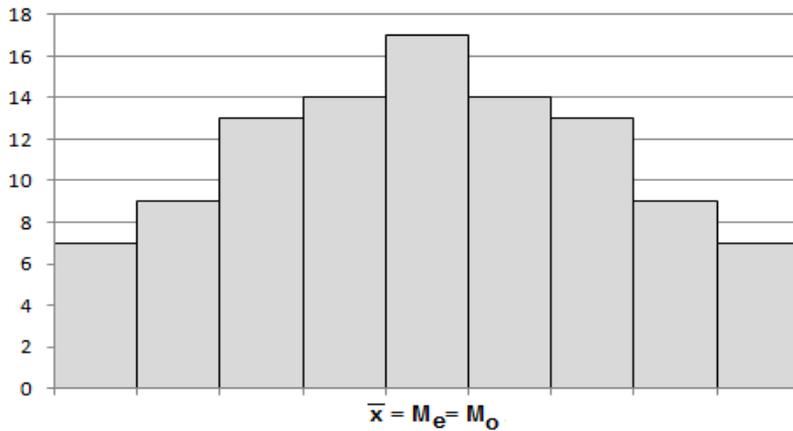


Gráfico 10: distribución simétrica.

Fuente: elaboración propia.

En el caso de no tener simetría, se tiene, entonces, asimetría a la derecha (o positiva) o a la izquierda (o negativa), dependiendo de si el histograma muestra una cola de medidas hacia valores altos o bajos de la variable, respectivamente. También se puede decir que la distribución está sesgada a la derecha (sesgo positivo) o a la izquierda (sesgo negativo). En el caso de una distribución asimétrica, la media, mediana y moda no coinciden, siendo $\bar{x} \geq M_e \geq M_o$ para una asimetría positiva y $\bar{x} \leq M_e \leq M_o$ para una asimetría negativa. Como se muestra en el siguiente gráfico.

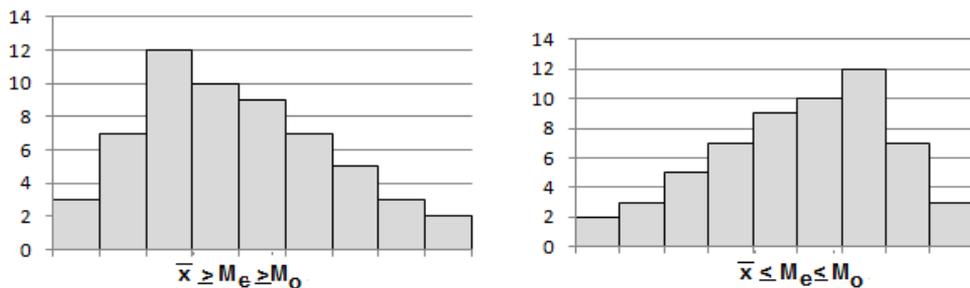


Gráfico 11: distribución asimétrica a la derecha y a la izquierda.

Fuente: elaboración propia.

Con el fin de cuantificar el grado de asimetría de una distribución se pueden definir los coeficientes de asimetría. Aunque no son los únicos, existen dos coeficientes principales:

❖ *Coeficiente de asimetría de Fisher*, que define como: $A_F = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^3 n_i}{N s^3}$

En el caso de una distribución simétrica, las desviaciones respecto a la media aritmética se anularán y el coeficiente de asimetría será nulo. En caso contrario, A_F tendrá valores positivos para una asimetría positiva (a la derecha) y negativos cuando la asimetría sea en el otro sentido. Nótese que la división por el cubo de la desviación estándar se hace para que el coeficiente sea adimensional y, por lo tanto, comparable entre diferentes muestras.

❖ *Coeficiente de asimetría de Pearson*. Este coeficiente también adimensional se define como: $A_P = \frac{\bar{x} - M_0}{s}$

Su interpretación es similar a la del coeficiente de Fisher, siendo nulo para una distribución simétrica y más positivo, o negativo, cuando más sesgada esté la distribución hacia la derecha o hacia la izquierda.

Continuando con el ejemplo 1 del apartado 3.1. “Tabla de frecuencia de una variable discreta”, calcúlese el coeficiente de asimetría de los datos, cuya media aritmética es $\bar{x} = 2,25$, desviación estándar $s = 1,16$ y moda es $M_0 = 2$

x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^3 n_i$
1	6	-11,7188
2	7	-0,1094
3	4	1,6875
4	2	10,7188
5	1	20,7969
Total	20	21,375

$$A_F = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^3 n_i}{N s^3} = \frac{21,375}{20 \cdot 1,5609} = 0,685 \quad A_P = \frac{\bar{x} - M_O}{s} = \frac{2,25 - 2}{1,16} = 0,215$$

b) Coeficientes de curtosis

Otra característica importante de la forma en la que se distribuyen los datos de la muestra, además de la simetría, es ver cómo se agrupan en torno al valor central. Los datos se pueden distribuir de forma que se tenga un gran apuntamiento o pico, alrededor del valor central, en cuyo caso se dice que la distribución es *leptocúrtica*¹⁴, o en el extremo contrario, la distribución puede ser muy aplanada, lo que se caracteriza diciendo que es *platicúrtica*¹⁵. En el caso intermedio, se dice que la distribución es *mesocúrtica*¹⁶ y el agrupamiento corresponderá al de una distribución llamada normal, o en forma de campana de Gauss.

¹⁴ El prefijo griego "lepto" significa delgado, fino. Curtosis o apuntamiento. Leptocúrtica: un apuntamiento alargado.

¹⁵ Plati, prefijo procedente del griego "platys" que significa ancho.

¹⁶ Meso, prefijo procedente del griego "mésos" que significa medio.

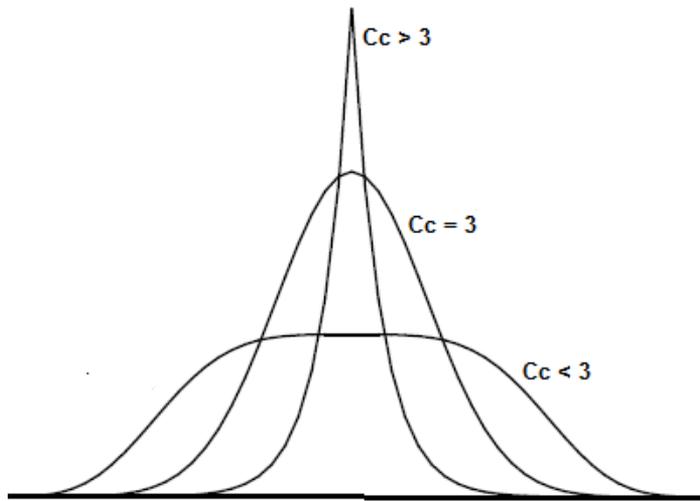


Gráfico 12: distribuciones con diferentes grados de apuntamiento.

Fuente: elaboración propia.

Esta característica del agrupamiento de los datos se denomina curtosis y para cuantificarla se define el *coeficiente de curtosis* C_c de la siguiente manera:

$$C_c = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^4 n_i}{N s^4}$$

Este coeficiente sin dimensión alcanza valores mayores cuanto más puntiaguda es la distribución, teniendo un valor de 3 para la distribución mesocúrtica (o normal), mayor que 3 para la leptocúrtica y menor que 3 para la platicúrtica.

TRABAJO PRÁCTICO: ESTADÍSTICA

1. Clasificar las siguientes variables según su tipo: cualitativas nominales, cualitativas ordinales, cuantitativas continuas o cuantitativas discretas.

Talle de camiseta (XS, S, M, L, XL, XXL)

Número de calzado

Temperatura corporal de un paciente

Día de la semana

Número de hijos

Último libro leído

Grado de aceptación de una decisión (De acuerdo, Neutral, En desacuerdo)

Marca de café preferida

Línea del autobús usada más frecuentemente

Número de asignaturas aprobadas el último año.

2. En una farmacia se está recogiendo información sobre el grado de satisfacción de los clientes respecto a su servicio nocturno, concretamente se está preguntando cuál es la opinión de los clientes en cuanto la relación calidad-precio de este servicio nocturno. Las respuestas dadas por los clientes encuestados han sido codificadas de la siguiente manera:

0: Muy desfavorable 1: Desfavorable

2: Favorable 3: Muy favorable

Se ha preguntado a un total de 70 clientes, y sus respuestas codificadas numéricamente han sido las siguientes:

0 1 3 0 1 1 2 3 0 0

3 3 3 2 1 2 0 3 0 2

1 0 0 2 3 2 2 2 1 1

2 2 0 3 0 2 2 0 3 3

0 3 0 1 2 2 2 0 2 1

1 0 1 2 3 3 3 2 1 1

0 0 2 3 1 0 1 3 2 1

- a) Identificar la variable y clasificarla.
- b) Resumir los datos en una tabla de frecuencias.
- c) Realizar un gráfico de sectores.

3. En la liga nacional de rugby femenino se contabilizaron y clasificaron las lesiones que tienen (A = rotura de menisco, B = rotura de ligamentos, C = rotura de tibia, D = rotura de rótula, E = rotura de fémur). Los resultados que se obtuvieron son:

A B B A C A A D B A C

E B B A A C D C A C B

C C C A B B C A A B C

C A C B B D A B A C B

C C A B B A D E C A B

A B D E E C C A D B B

B A D D E C C E B B A

B D A

- a) Identificar la variable y clasificarla.
- b) Resumir los datos en una tabla de frecuencias.
- c) Realizar un diagrama de barras y polígono de frecuencias.

4. Los ingenieros industriales realizan periódicamente un análisis de la medición del trabajo con el fin de determinar el tiempo requerido para generar una unidad de producción. En una planta de procesamiento se registró durante 20 días el número de horas-obrero totales requeridas para realizar cierta tarea. Los datos recogidos son:

128 119 95 97

113 109 124 132

146 128 103 135

124 131 133 131

100 112 111 150

- Identificar la variable y clasificarla.
- Resumir los datos en una tabla de frecuencias.
- Realizar un diagrama de barra y polígono de frecuencias.
- Calcular las medidas de: centralización, dispersión, asimetría y curtosis.

5. En una empresa de congelados, la demanda diaria, en lotes de producto, durante 30 días de trabajo es:

38 35 76 58 48 59

67 63 33 69 53 51

28 25 36 32 61 57

49 78 48 42 72 52

47 66 58 44 44 56

- Identificar la variable y clasificarla.
- Resumir los datos en una tabla de frecuencias.
- Realizar un diagrama de barra y polígono de frecuencias.
- Calcular las medidas de: centralización, dispersión, asimetría y curtosis.

6. Se han tomado muestras a 40 niños entre 1 y 5 años; del nivel de cobre en orina, obteniéndose los siguientes valores:

0.10 0.30 0.34 0.36 0.42 0.42 0.45 0.48 0.50 0.52

0.55 0.58 0.62 0.63 0.64 0.65 0.65 0.66 0.69 0.70

0.72 0.73 0.74 0.74 0.75 0.76 0.77 0.78 0.81 0.83

0.85 0.86 0.88 0.90 0.94 0.98 1.04 1.12 1.16 1.24

- Identificar las unidades experimentales, la variable de estudio y el tipo de esta.
- Resumir los datos en una tabla de frecuencias distribuidas en intervalos.

c) Realizar histograma y polígono de frecuencias.

d) Calcular las medidas de: centralización, dispersión, asimetría y curtosis.

7. En una farmacia se realiza el seguimiento de la Hipertensión Arterial de algunos pacientes. Se dispone de 30 mediciones de la tensión arterial sistólica (TAS) realizadas en un día hábil de la semana, las cuales se muestran a continuación:

173,03 165,54 141,59 158,66 158,81 156,49 150,29 154,53 162,50 158,49
151,11 166,13 147,47 152,83 166,99 135,62 138,77 168,11 162,04 176,77
159,97 152,99 161,92 167,70 143,35 154,06 160,82 180,08 172,93 158,72

a) Identificar la variable de estudio y el tipo de ésta.

b) Resumir los datos en una tabla de frecuencias distribuidas en intervalos.

c) Realizar histograma y polígono de frecuencias.

d) Calcular las medidas de: centralización, dispersión, asimetría y curtosis.

8. Responder las siguientes preguntas respecto de la variable, salario (en miles de pesos) de 1500 trabajadores de una empresa.

Salarios	N° de trabajadores
[11; 15]	108
[15; 17]	377
[17; 19]	575
[19; 21]	351
[21; 25]	89

a) ¿Cuántos trabajadores cobran entre 15.000 y 17.000 pesos?

b) ¿Qué porcentaje de trabajadores cobran entre 19.000 y 21.000 pesos?

c) ¿Cuántos trabajadores cobran más de 17.000 pesos?

- d) ¿Qué proporción representan los trabajadores que cobran hasta 19.000 pesos?
- e) Dibujar un histograma que represente la distribución de los salarios de los trabajadores de la empresa.
- f) ¿Cuál es el salario más habitual de la empresa?
- g) ¿Qué salario no es superado por el 32,33% de los trabajadores?
- h) ¿Cuál es el salario medio de los trabajadores de la empresa?
- i) ¿Qué desviación típica tienen los salarios?
- j) La distribución de los salarios ¿es homogénea? (interpretación del CV)
- k) Si para los datos de la empresa el coeficiente de asimetría es 0,023 y el coeficiente de curtosis $-0,120$ ¿qué se puede decir respecto de la forma de la distribución?

AUTOEVALUACIÓN: ESTADÍSTICA

1. Responder, con tinta, Verdadero o Falso, NO justificar la respuesta.

a) Las variables discretas resultan de registrar la presencia de un atributo en las unidades de observación.

b) Se define frecuencia relativa de una variable; como el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra.

c) La media aritmética representa una especie de centro de gravedad del conjunto de datos.

d) El rango de las observaciones: 3, 8, 5, 20, 14 y 2, es: 18.

e) Si una distribución de datos es simétrica, se cumple que: $\bar{x} \geq M_e \geq M_o$

2. Completar con la respuesta correcta. Responder con tinta.

a) La distinción entre datos discretos y continuos es la diferencia básica entre.....

b) Se define frecuencia absoluta de una variable como.....

c) La M_e de: 14, 8, 9, 1, 7 y 3, es:

d) En una muestra de tamaño N , los k diferentes valores de la variable tienen frecuencia absoluta n_i , la expresión de la desviación media, es.....

e) Si una distribución es asimétrica a la derecha, el coeficiente de asimetría de Fisher toma valores.....

3. Escribir en el recuadro y con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) Sea la variable: Cantidad de hijos por familia, se la puede clasificar como

- A) Dicotómica B) Más de 2 categorías C) Discreta D) Continua

b) El valor de una variable en el centro de un intervalo de clase se denomina

A) Marca de clase

B) Media de la Clase

C) Representante de la clase

D) Extremo de la clase

c) Un conjunto de datos puede ser:

A) Amodal

B) Bimodal

C) Trimodal

D) Todas las respuestas

d) El coeficiente de variación de Pearson (CV) se calcula como :

A) $\frac{\sqrt{s}}{|\bar{x}|}$

B) $\frac{s^2}{|\bar{x}|}$

C) $\frac{s}{|x_i|}$

A) $\frac{s}{|\bar{x}|}$

e) Si una distribución es de forma tal que se tiene un pico alrededor de un valor central, la distribución es:

A) Leptocúrtica

B) Platicúrtica

C) Mesocúrtica

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN: ESTADÍSTICA

Para cada uno de los siguientes enunciados, escribir el programa o subrutina solicitado. En cada caso el usuario deberá ingresar:

1. El tamaño (N) de una muestra de una variable (discreta o continua), sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i); y se deberá mostrar la media aritmética (\bar{x}) de la muestra.
2. El tamaño (N) de una muestra de una variable (discreta o continua), sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i); y se deberá mostrar la media geométrica (\bar{x}_G) de la muestra.
3. El tamaño (N) de una muestra de una variable (discreta o continua), sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i); y se deberá mostrar la media armónica (\bar{x}_A) de la muestra.
4. El tamaño (N) de una muestra de una variable (discreta o continua), sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i); y se deberá mostrar la media cuadrática (\bar{x}_Q) de la muestra.
5. El tamaño (N) de una muestra de una variable discreta, sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i) y se deberá mostrar la mediana (M_e) de la muestra.
6. El tamaño (N) de una muestra de una variable discreta, sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i) y se deberá mostrar el primer cuartil ($Q_{1/4}$) y el tercer cuartil ($Q_{3/4}$) de la muestra.
7. El tamaño (N) de una muestra de una variable discreta, sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i) y se deberá mostrar la moda (M_o) de la muestra.

- 8.** El tamaño (N) de una muestra de una variable discreta, sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i), la media aritmética (\bar{x}) y se deberá mostrar la desviación media respecto de la media aritmética ($D_{\bar{x}}$) de la muestra.
- 9.** El tamaño (N) de una muestra de una variable discreta, sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i), la mediana (M_e) y se deberá mostrar la desviación media respecto de la mediana (D_{M_e}) de la muestra.
- 10.** El tamaño (N) de una muestra de una variable discreta, sus distintos valores (x_i), sus respectivas frecuencias absolutas (n_i), la media aritmética (\bar{x}) y se deberá mostrar la varianza (s^2) y la desviación estándar (s) de la muestra.
- 11.** El tamaño (N) de una muestra de una variable discreta, sus distintos valores (x_i) y sus respectivas frecuencias absolutas (n_i), la media aritmética (\bar{x}); y se deberá mostrar el coeficiente de variación de Pearson (CV) de la muestra.

BIBLIOGRAFÍA

Disset, L. (2004). *Apuntes de Clases – Matemática Discreta*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile.

Gorgas García, J.; Cardiel López, N. y Zamorano Caalvo, J. (2011). *Estadística Básica para estudiantes de ciencias*. Departamento de Astrofísica y Ciencias de la Atmósfera. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense de Madrid.

Jiménez Murillo, J. (2011). *Matemática para la computación*. (Primera edición). México: Alfa Omega Grupo editor S. A.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. (Sexta edición). (Traducción de Gonzales Osuna, M.). México: Pearson Educación Prentice Hall.

Kolman, B.; Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de Matemáticas discretas para la Computación*. (Tercera edición). (Traducción de Palmas Velasco, O.). México: Prentice – Hall Hispanoamericana S. A.

Rosen, K. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (Quinta edición). (Traducción de Pérez Morales y otros). España: Mc Graw Hill.

Rustom, A. J. (2012). “Estadística descriptiva probabilidad e inferencia”. *Una visión conceptual y aplicada*. Departamento de Economía Agraria. Facultad de Ciencias Agronómicas. Universidad de Chile. Santiago de Chile.

Los autores

Héctor Ramón Tarifa. Especialista en Investigación Educativa por la Universidad Nacional de Tucumán; licenciado en Enseñanza de la Matemática, egresado de la Universidad Nacional de Jujuy, y profesor de Matemática, egresado del Instituto Nacional de Enseñanza Superior “José E. Tello” de la provincia de Jujuy. Se desempeña como profesor asociado de la cátedra Álgebra y Geometría Analítica y profesor adjunto de las cátedras Álgebra I y Álgebra II de la carrera Analista Programador Universitario de la Facultad de Ingeniería de la UNJu. Es investigador categorizado de la Secretaría de Ciencia y Técnica y Estudios Regionales. Sus investigaciones se concentran en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Gonzalo Daniel Bono. Profesor de Matemática egresado de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba. Se desempeña como profesor adjunto en la cátedra de Matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional de Jujuy, desarrollando además actividades docentes en la cátedra de Análisis Matemático de la misma Facultad y en las cátedras Álgebra I y Álgebra II de la Facultad de Ingeniería de la UNJu. Es investigador novel para proyectos de iniciación en investigaciones científicas por la Facultad de Ciencias Agrarias.

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY

Rector

Lic. Rodolfo Alejandro Tecchi

Vice-Rector

Dr. Ricardo Enrique Gregorio Slavutsky

Secretario General

E.S. Edgardo Aramayo

Secretario de Asuntos Académicos

Mg. Mario César Bonillo

Secretario Legal y Técnico

Dr. César Guillermo Farfán

Secretario de Administración

C.P.N. Jaime Sebastián Berástegui

Secretaria de Ciencia y Técnica y Estudios Regionales

Mg. Sandra Adriana Giunta

Secretario de Extensión Universitaria

Dr. Ernesto Max Agüero

Secretario de Bienestar Universitario

Brom. Fernando Ramón Torrejón

Coordinador de EDIUNJu

Lic. Daniel González



Apuntes de Álgebra II, de
Héctor Tarifa y Gonzalo Bono,
se terminó de imprimir en la
primera quincena del mes de
febrero del 2021, en los Talleres
Gráficos de la Imprenta de la
UNJu.

Jujuy - Argentina.

Tirada: 200 ejemplares.

Apuntes de Álgebra II es la síntesis de los distintos materiales que, a través de los años, se fueron elaborando y corrigiendo, para poder brindárselos a los alumnos de la carrera Analista Programador Universitario de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy. Expone como temas fundamentales de Matemática Discreta: Relaciones, Grafos, Árboles y Álgebra de Boole.

Por otra parte, y para seguir aportando y enriqueciendo el desarrollo del pensamiento crítico de los futuros profesionales de la carrera, se dedica un capítulo especial para Probabilidades y otro para Estadística Descriptiva.

En el desarrollo de cada contenido en particular, luego de enunciar los conceptos teóricos –demostrarlos si correspondiere– y de ejemplificarlos, se proponen ejercicios resueltos que permiten una mejor interpretación y afianzamiento de los conocimientos, terminando con distintas aplicaciones a Ciencias de la Computación. Se continúa con la propuesta del desarrollo de un Trabajo Práctico, la elaboración de una Autoevaluación de ejercicios estructurados y, finalmente, el enunciado de ejercicios de programación.

ISBN 978-950-721-560-5

